Объединенная межвузовская математическая олимпиада 02.02.2014

I вариант

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\frac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел также меньше единицы.

Задача 3. Натуральное 61-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. В записи числа А двоек на 19 больше, чем четверок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины отрезков MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$\left(y(x-1)\right)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0,5f(x-\pi) = \sin x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $30°$. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|\ln|x|| = ax$ имеет ровно три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, всегда говорящие правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 105 жителей, на второй – 45, на третий – 85 и на четвёртый – 65. В каком квартале лжецов живет больше, чем рыцарей и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ A_1C, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Страница олимпиады: http://olimpiada.ru/ommo

Вариант 2

Задача 1 В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ выполняется разность $x_{n+1} - x_n$ вдвое меньше, чем $x_{n+1} - x_{n-1}$. Найдите отношение $\dfrac{x_{20} - x_{14}}{x_{2014} - x_{2000}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати из них больше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел также больше единицы.

Задача 3. Натуральное 59-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. В записи числа А пятерок на 8 больше, чем троек. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины отрезков MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка AE, если $HK = 3$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$4y^2\left(x^4 + 2x^2\right) + 8y^2 + x^4 + 2x^2 = 8|y|(x^2 + 1) - 2.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 3f(x - \pi) = \cos x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $60°$. Основания имеют длины 4 и 1. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x-1|\right| = ax - a$ имеет ровно три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, всегда говорящие правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 95 жителей, на второй – 115, на третий – 157 и на четвёртый – 133. В каком квартале лжецов живет больше, чем рыцарей, и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 20$, $AD = 12$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ BD_1, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Вариант 3

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 2$ сумма $x_{n+1} + x_{n-1}$ вдвое больше числа x_n. Найдите отношение $\frac{x_{2n} - x_n}{x_{n+2} - x_{n-2}}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых сорока из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел также меньше единицы.

Задача 3. Натуральное 67-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. В записи числа А двоек на 22 больше, чем четверок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины отрезков MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7{,}5$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0{,}4f(x-\pi) = \sin x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $45°$. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x+1|\right| = a(x+1)$ имеет ровно три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, всегда говорящие правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 42 жителей, на второй – 100, на третий – 80 и на четвёртый – 68. В каком квартале рыцарей живет меньше, чем лжецов, и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 6$, $AD = 15$ и $AA_1 = 8$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ A_1C и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Вариант 4

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geq 3$ выполняется равенство $x_{n-1} = \dfrac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{3}$. Найдите значение выражения $\dfrac{x_{300} - x_{33}}{x_{333} - x_3}$.

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых сорока пяти из них больше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел также больше единицы.

Задача 3. Натуральное 57-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. В записи числа A троек на 11 больше, чем пятерок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины отрезков MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка AE, если $HK = 1{,}2$.

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$4y^2\left(x^4+2x^2\right)+8y^2+x^4+2x^2=8|y|\left(x^2+1\right)-2.$$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x)-2f(x-\pi)=\cos x$$

при всех x.

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол $45°$. Основания имеют длины 1 и 4. Найдите высоту трапеции.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|\ln|x|\right| = ax$ имеет ровно три решения.

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них – рыцари, всегда говорящие правду, остальные – лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырех кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живете в квартале А?», «Вы живете в квартале Б?», «Вы живете в квартале В?», «Вы живете в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответило 109 жителей, на второй – 98, на третий – 104 и на четвёртый – 119. В каком квартале рыцарей живет больше, чем лжецов, и на сколько?

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 10$ проведены два сечения – плоскостью, проходящей через диагональ AC_1, и плоскостью, проходящей через диагональ BD_1. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):

$+$ задача решена полностью;

$\pm$ задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения (например, допущена арифметическая ошибка в конце правильного решения);

$\mp$ задача не решена, но имеются содержательные продвижения (например, задача решена для содержательного частного случая);

$-$ задача не решена;

0 к решению задачи участник не приступал.

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач, то есть задач, за которые поставлена оценка $+$ или $\pm$.

Обращаем внимание, что критерии обычно уточняются и в ходе первой проверки, и, особенно, в ходе второй проверки.

Оргкомитет ОММО

Вариант 1 (ответы и решения)

Задача 1. Из $x_n = \frac{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}{3}$ следует, что $x_{n+1}-x_n = x_n - x_{n-1}$ для всех $n \ge 2$. Это значит, что последовательность – арифметическая прогрессия. Пусть разность прогрессии равна d. Тогда $\frac{x_{2012}-x_{1006}}{x_{1006}-x_{503}} = \frac{1006d}{503d} = 2$.

Ответ: 2.

Задача 2. Среди данных чисел не более чем 34 числа могут быть больше единицы, иначе условие задачи не выполнено. Возьмем 35 чисел, среди которых имеются все числа, большие единицы. Произведение взятых 35 чисел по условию меньше единицы. Все прочие числа меньше единицы. Их произведение тоже меньше единицы. Следовательно, произведение всех чисел также меньше единицы.

Задача 3. Пусть число N записано цифрами $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$, то есть

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Вычтем из числа N сумму его цифр:

$$N - (a_n + a_{n-1} + ... + a_0) = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + ... + 9a_1.$$

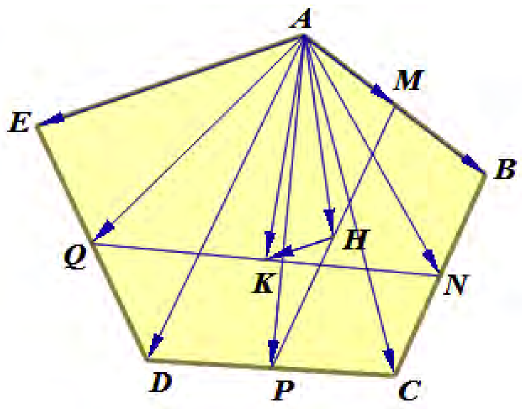
Числа вида $10^k - 1$ делятся на 9. Значит, число $N - (a_n + a_{n-1} + ... + a_0)$ делится на 9. Следовательно, при делении на 9 каждое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр. Пусть в записи числа A встречается n четверок. Тогда двоек там $n+19$, а все оставшиеся цифры – тройки. Сумма цифр равна

$$4 \cdot n + 2 \cdot (n+19) + 3 \cdot (61 - 2n - 19) = 6n + 38 + 126 - 6n = 164.$$

В свою очередь, сумма цифр числа 164 равна 11. Остаток от деления 11 на 9 равен 2. Такой же остаток имеет число 164 и, следовательно, число A.

Ответ: 2.

Задача 4. Используем векторы.



$$\overline{HK} = \overline{AK} - \overline{AH} = \frac{1}{2}\left(\overline{AQ} + \overline{AN}\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{AM} + \overline{AP}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AE} + \overline{AD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\left(\overline{AC} + \overline{AD}\right)\right) = \frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Значит, $HK = \frac{1}{4}AE = 1,75$.

Ответ: 1,75.

Задача 5. Группируя слагаемые, получим

$$(x-1)^2\left(y^2+1\right) + y^2 + 1 = 4y|x-1|; \quad \left(|x-1|^2 + 1\right)\left(y^2+1\right) = 4y|x-1|.$$

Очевидно, при $y=0$ или при $x=1$ решений нет. Разделим обе части на $y|x-1|$. Получим: $\left(|x-1|+\frac{1}{|x-1|}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=4$.

При $y<0$ решений нет, значит, $y>0$. Известно[1] (легко показать), что если $a>0$, то $a+\frac{1}{a}\geq 2$, причем равенство достигается, только если $a=1$. Следовательно, правая часть равна 4, только если $|x-1|=1$ и $y=1$.

Ответ: (0, 1), (2, 1).

Задача 6. Предположим, что T – период функции $y=f(x)$. Из условия получаем:

$$\sin x=f(x)-0,5f(x-\pi)=f(x-T)-0,5f(x-T-\pi)=\sin(x-T).$$

Поскольку это равенство верно для всех x, число T является периодом функции $y=\sin x$, т.е. $T=2\pi n,$ где n – некоторое натуральное число. Из данного уравнения получаем:

$$f(x)=0,5f(x-\pi)+\sin x=0,5\big(0,5f(x-2\pi)-\sin x\big)+\sin x=$$

$$=0,5\Big(0,5\big(f(x-3\pi)+\sin x\big)-\sin x\Big)+\sin x=$$

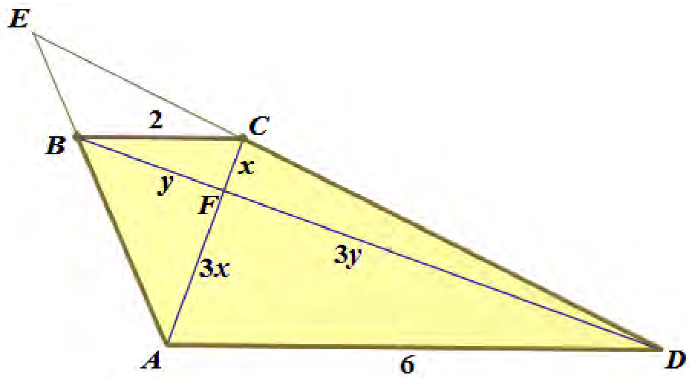
$$=\ldots=0,5\Big(0,5\Big(\ldots\big(0,5f(x-2\pi n)-\sin x\big)+\ldots+\sin x\Big)-\sin x\Big)+\sin x=$$

$$=0,5^{2n}f(x)-\sin x\left(0,5^{2n-1}-0,5^{2n-2}+0,5^{2n-3}-\ldots+0,5-1\right).$$

Тогда $f(x)\left(1-0,5^{2n}\right)=\sin x\left(1-0,5+0,5^2-\ldots-0,5^{2n-1}\right)=\sin x\dfrac{1-0,5^{2n}}{1+0,5}$.

Следовательно, $f(x)=\frac{2}{3}\sin x$.

Ответ: $f(x)=\frac{2}{3}\sin x$.



Задача 7. Введем обозначения, как на рисунке. Продолжив боковые стороны, обозначим их точку пересечения буквой E. Точку пересечения диагоналей назовем F. Прямоугольные треугольники BFC и DFA подобны и, если обозначить катеты первого x и y, то соответственные катеты второго равны $3x$ и $3y$.

Высота трапеции h складывается из высот треугольников BFC и AFD:

$$h=\frac{BF\cdot FC}{2}+\frac{AF\cdot FD}{6}=\frac{xy}{2}+\frac{9xy}{6}=2xy.$$

Площадь трапеции равна $\frac{8}{9}$ площади треугольника AED. Получаем:

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin 30^\circ=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}AB\cdot\frac{3}{2}CD=\frac{1}{2}AB\cdot CD\ ,$$

[1] Это утверждение является частным случаем неравенства Коши.

откуда $8xy=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9y^2}\cdot\sqrt{y^2+9x^2}$. Учитывая, что $x^2+y^2=4$, находим:

$$8xy=\frac{1}{2}\sqrt{4+8y^2}\cdot\sqrt{4+8x^2}=2\sqrt{\left(1+2y^2\right)\left(1+2x^2\right)}.$$

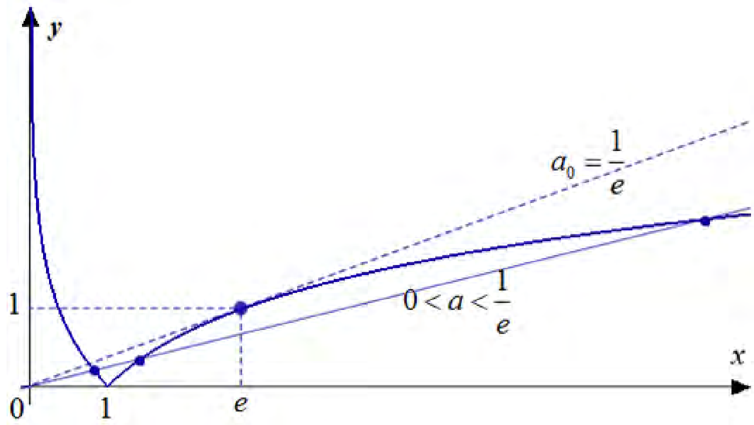
Проведем очевидные преобразования:

$$16x^2y^2=1+2\left(x^2+y^2\right)+4x^2y^2;\quad 12x^2y^2=9;\quad 2xy=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 8. Левая часть уравнения неотрицательна. Следовательно, $ax\geq 0$. При $a=0$ уравнение имеет два корня -1 и 1. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию.

Рассмотрим случай $a>0$. Тогда $x\geq 0$ и поэтому $|x|=x$. Построим график функции $y=|\ln x|$. Прямая $y=ax$ должна пересекать этот график в трех точках. На рисунке видно, что это выполняется тогда и только тогда, когда прямая проходит внутри угла, образованного осью абсцисс и касательной $y=a_0x$ к графику функции $y=\ln x$ при $x>1$.



Найдем a_0. Абсцисса точки касания удовлетворяет уравнениям $a_0x=\ln x$, $a_0=\frac{1}{x}$, откуда $a_0=\frac{1}{e}$, $x=e$. Таким образом, $0<a<\frac{1}{e}$.

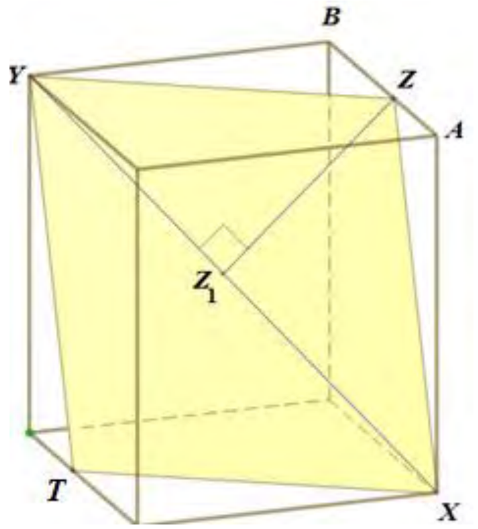
Случай $a<0$ симметричен, то есть $-\frac{1}{e}<a<0$.

Ответ. $-\frac{1}{e}<a<0,\ 0<a<\frac{1}{e}$.

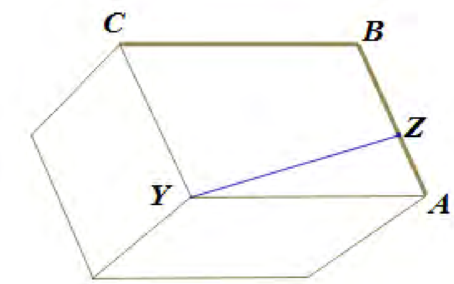
Задача 9. На четыре вопроса каждый рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец – три. Всего было получено $105+45+85+65=300$ утвердительных ответов. Если бы все жители города были рыцарями, в сумме всех утвердительных ответов было бы 200. 100 лишних ответов «да» происходят от вранья лжецов. Таким образом, лжецов $\frac{100}{2}=50$. Пусть в квартале Б живет k рыцарей, тогда $45-k$ – число утвердительных ответов на второй вопрос, которые дали лжецы. Значит число лжецов, живущих в квартале Б, равно $50-\left(45-k\right)=k+5$. В остальных кварталах число лжецов меньше числа рыцарей.

Ответ: в квартале Б, на 5.

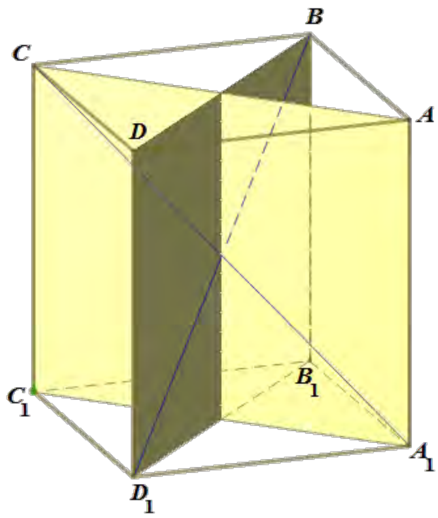
Задача 10. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед сечениями, равна сумме площади поверхности параллелепипеда и площадей внутренних поверхностей. Сумма площадей внутренних поверхностей равна удвоенной сумме площадей сечений.



Найдем наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через диагональ XY произвольного параллелепипеда с ребрами $a \le b \le c$. Сечением является параллелограмм $ZXTY$, вершины которого лежат на противоположных рёбрах параллелепипеда. Площадь параллелограмма равна произведению длины диагонали XY на расстояние от точки Z до XY.



Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную диагонали XY. На рисунке видно, что расстояние от точки Z ломаной ABC до точки Y, то есть до диагонали XY, наибольшее, если Z совпадает с одной из вершин A, B или C.



Значит, сечение проходит через одно из ребер параллелепипеда. Таким образом, наибольшую площадь имеет одно из диагональных сечений. Все эти сечения являются прямоугольниками. Найдем наибольшую из их площадей

$$S_1 = a\sqrt{b^2+c^2}, \; S_2 = b\sqrt{a^2+c^2} \text{ и } S_3 = c\sqrt{b^2+a^2}.$$

Из условия $a \le b \le c$ следует, что, $a^2b^2 + a^2c^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$, и $a^2b^2 + c^2b^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$. Поэтому $S_1 \le S_3$ и $S_2 \le S_3$. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через наибольшее ребро. По условию наибольшую длину имеет ребро AA_1, значит, наибольшую площадь $5\sqrt{4^2+3^2} = 25$ имеют сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D.

Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед этими сечениями (см. рисунок), равна

$$2(AA_1 \cdot AB + AA_1 \cdot AD + AB \cdot AD) + 4 \cdot 25 = 194.$$

Ответ: 194.

Вариант 2 (ответы и решения)

Задача 1. По условию $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_{n+1}-x_{n-1}}{2}$ для всех $n\geq 2$. Отсюда следует, что $x_{n+1}+x_{n-1}=2x_n$. Это означает, что данная последовательность – арифметическая прогрессия. Пусть разность прогрессии равна d. Тогда $\dfrac{x_{20}-x_{14}}{x_{2014}-x_{2000}}=\dfrac{6d}{14d}=\dfrac{3}{7}$.

Ответ: $\dfrac{3}{7}$.

Задача 2. Среди данных чисел не более чем 29 чисел могут быть меньше единицы, иначе условие задачи не выполнено. Возьмем 30 чисел, среди которых имеются все числа, меньшие единицы. Произведение взятых 30 чисел по условию больше единицы. Все прочие числа больше единицы. Их произведение тоже больше единицы. Следовательно, произведение всех чисел также больше единицы.

Задача 3. Пусть число N записано цифрами $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$, то есть

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_1\cdot 10+a_0.$$

Вычтем из числа N сумму его цифр:

$$N-\left(a_n+a_{n-1}+...+a_0\right)=\left(10^n-1\right)a_n+\left(10^{n-1}-1\right)a_{n-1}+...+9a_1.$$

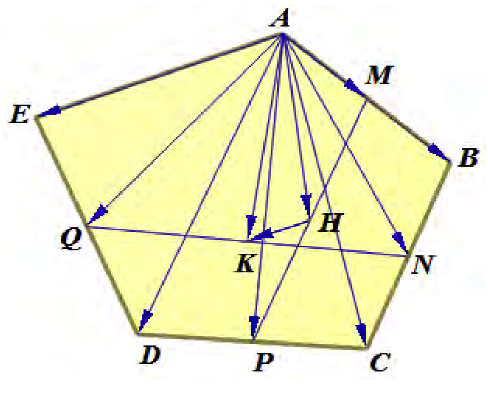
Числа вида 10^k-1 делятся на 9. Значит, число $N-\left(a_n+a_{n-1}+...+a_0\right)$ делится на 9. Следовательно, при делении на 9 каждое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

Пусть в записи числа A встречается n троек. Тогда пятерок там $n+8$, а все оставшиеся цифры – четверки. Сумма цифр равна

$$3\cdot n+5\cdot(n+8)+4\cdot\left(59-2n-8\right)=8n+40+204-8n=244.$$

В свою очередь, сумма цифр числа 244 равна 10. Остаток от деления 10 на 9 равен 1. Такой же остаток от деления на 9 имеет число 244 и, следовательно, число A.
Ответ: 1.

Задача 4. Используем векторы.



$$\overline{HK}=\overline{AK}-\overline{AH}=\frac{1}{2}\left(\overline{AQ}+\overline{AN}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{AM}+\overline{AP}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AE}+\overline{AD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\left(\overline{AC}+\overline{AD}\right)\right)=\frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Значит, $AE=4HK=12$.
Ответ: 12.

Задача 5. Группируя слагаемые, получим

$$(4y^2+1)(x^4+2x^2+2)=8|y|(x^2+1).$$

Очевидно, что при $y=0$ решений нет. Разделим обе части на $2|y|(x^2+1)$ и получим

$$\left(2|y|+\frac{1}{2|y|}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)=4.$$

Известно[1] (легко показать), что если $a>0$, то $a+\frac{1}{a}\geq 2$, причем равенство достигается, только при $a=1$. Следовательно, правая часть равна 4, только если $2|y|=1$ и $x^2+1=1$.

Ответ: $(0, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$.

Задача 6. Предположим, что T – период функции $y=f(x)$. Из условия получаем:

$$\cos x = f(x)-3f(x-\pi)=f(x-T)-3f(x-T-\pi)=\cos(x-T).$$

Поскольку это равенство верно для всех x, число T является периодом функции $y=\cos x$, т.е. $T=2\pi n$, где n – некоторое натуральное число. Из данного уравнения получаем:

$$f(x)=3f(x-\pi)+\cos x=3\big(3f(x-2\pi)-\cos x\big)+\cos x=$$

$$=3\Big(3\big(3f(x-3\pi)+\cos x\big)-\cos x\Big)+\cos x=$$

$$=\ldots=3\Big(3\big(\ldots\big(3f(x-2\pi n)-\cos x\big)+\ldots+\cos x\big)-\cos x\Big)+\cos x=$$

$$=3^{2n}f(x)-\cos x\left(3^{2n-1}-3^{2n-2}+3^{2n-3}-\ldots+3-1\right).$$

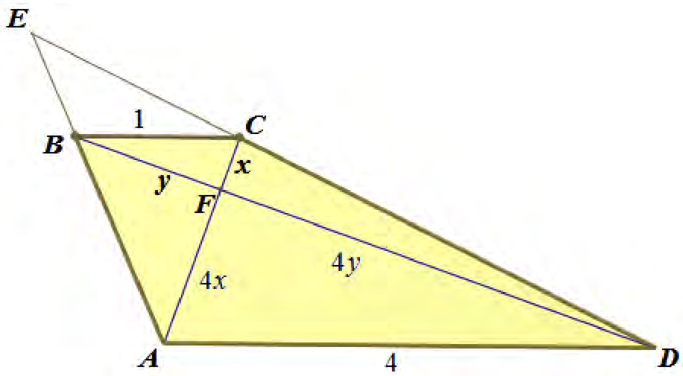
Тогда

$$f(x)\left(1-3^{2n}\right)=\cos x\left(1-3+3^2-\ldots-3^{2n-1}\right)=\cos x\cdot\frac{1-3^{2n}}{1+3}.$$

Следовательно, $f(x)=\frac{1}{4}\cos x$.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{4}\cos x$.

Задача 7. Введем обозначения, как на рисунке. Продолжив боковые стороны, обозначим их точку пересечения буквой E. Точку пересечения диагоналей назовем F. Прямоугольные треугольники BFC и DFA подобны и, если обозначить катеты первого x и y, то соответственные катеты второго равны $4x$ и $4y$.



Высота трапеции h складывается из высот треугольников BFC и AFD:

$$h=\frac{BF\cdot FC}{1}+\frac{AF\cdot FD}{4}=xy+\frac{4x\cdot 4y}{4}=5xy.$$

Площадь трапеции равна $\frac{15}{16}$ площади треугольника AED. Получаем:

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin 60^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{64}\cdot\frac{4}{3}AB\cdot\frac{4}{3}CD=\frac{15\sqrt{3}}{36}AB\cdot CD,$$

откуда

[1] Это утверждение является частным случаем неравенства Коши.

$$\frac{25}{2}xy = \frac{15\sqrt{3}}{36}\sqrt{x^2+16y^2}\cdot\sqrt{y^2+16x^2}.$$

Учитывая, что $x^2+y^2=1$, находим: $\frac{30}{\sqrt{3}}xy = \sqrt{1+15y^2}\cdot\sqrt{1+15x^2}$.

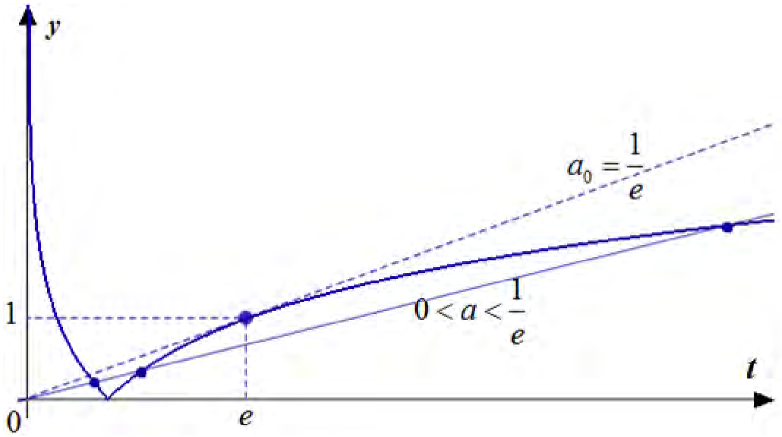
Проведем очевидные преобразования:

$$300x^2y^2 = 1+15\left(x^2+y^2\right)+225x^2y^2; \quad 75x^2y^2=16; \quad 5xy=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Задача 8. Сделаем замену $t=x-1$. Получаем уравнение $\left|\ln|t|\right| = at$, которое также должно иметь три решения. Левая часть неотрицательна. Следовательно, $at \geq 0$. При $a=0$ уравнение имеет два корня -1 и 1. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию.

Рассмотрим случай $a>0$. Тогда $t\geq 0$ и поэтому $|t|=t$. Построим график функции $y=|\ln t|$. Прямая $y=at$ должна пересекать этот график в трех точках. На рисунке видно, что это выполняется тогда и только тогда, когда прямая проходит внутри угла, образованного осью абсцисс и касательной $y=a_0t$ к графику функции $y=\ln t$ при $t>1$.



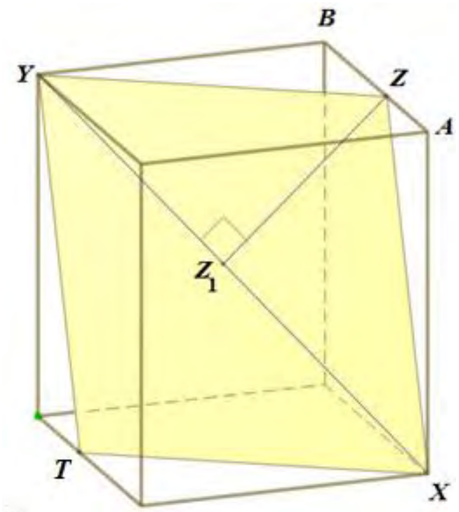
Найдем a_0. Абсцисса точки касания удовлетворяет условиям $a_0t=\ln t$ и $a_0=\frac{1}{t}$, откуда $a_0=\frac{1}{e}$, $t=e$. Таким образом, $0<a<\frac{1}{e}$. Случай $a<0$ симметричен, то есть $-\frac{1}{e}<a<0$.

Ответ. $-\frac{1}{e}<a<0,\ 0<a<\frac{1}{e}$.

Задача 9. На четыре вопроса каждый рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец – три. Всего было получено $95+115+157+133=400$ утвердительных ответов. Если бы все жители города были рыцарями, в сумме всех утвердительных ответов было бы 200. 200 лишних ответов «да» происходят от вранья лжецов. Таким образом, лжецов $\frac{200}{2}=100$.

Пусть в квартале А живет k рыцарей, тогда $95-k$ – число утвердительных ответов на первый вопрос, которые дали лжецы. Значит число лжецов, живущих в квартале А, равно $100-\left(95-k\right)=k+5$. В остальных кварталах число лжецов меньше числа рыцарей.

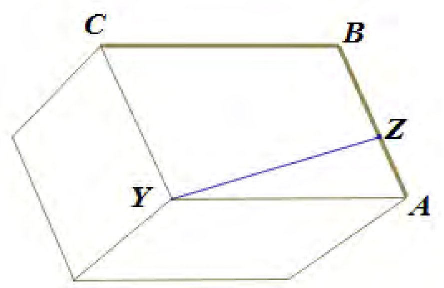
Ответ: в квартале А, на 5 человек.



Задача 10. Решение. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед сечениями, равна сумме площади поверхности параллелепипеда и площадей внутренних поверхностей. Сумма площадей внутренних поверхностей равна удвоенной сумме площадей сечений.

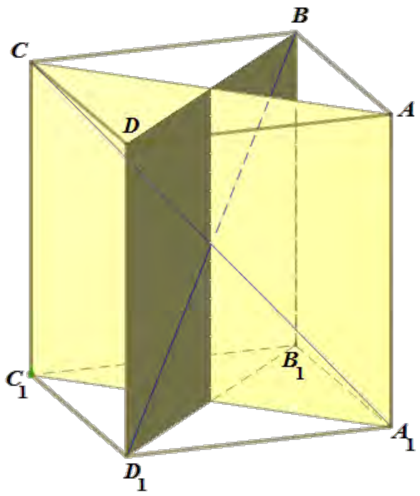
Найдем наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через диагональ XY произвольного параллелепипеда с ребрами $a \le b \le c$. Сечением является параллелограмм $ZXTY$, вершины которого лежат на противоположных ребрах параллелепипеда. Площадь параллелограмма равна произведению длины диагонали XY на расстояние от точки Z до XY.

Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную диагонали XY. На рисунке видно, что расстояние от точки Z ломаной ABC до точки Y, то есть до диагонали XY, наибольшее, если Z совпадает с одной из вершин A, B или C.



Значит, сечение проходит через одно из ребер параллелепипеда. Таким образом, наибольшую площадь имеет одно из диагональных сечений. Все эти сечения являются прямоугольниками. Найдем наибольшую из их площадей

$S_1 = a\sqrt{b^2 + c^2}$, $S_2 = b\sqrt{a^2 + c^2}$ и $S_3 = c\sqrt{b^2 + a^2}$.



Из условия $a \le b \le c$ следует, что, $a^2b^2 + a^2c^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$, и $a^2b^2 + c^2b^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$. Поэтому $S_1 \le S_3$ и $S_2 \le S_3$. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через наибольшее ребро.

По условию наибольшую длину имеет ребро AB, значит, наибольшую площадь, равную $20\sqrt{5^2 + 12^2} = 260$ имеют сечения ABC_1D_1 и B_1A_1DC. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед этими сечениями (см. рисунок), равна

$$2(AA_1 \cdot AB + AA_1 \cdot AD + AB \cdot AD) + 4 \cdot 260 = 1840.$$

Ответ: 1840.

Вариант 3 (ответы и решения)

Задача 1. По условию $x_{n+1}-x_{n-1}=2x_n$ для всех $n\geq 2$. Это значит, что данная последовательность – арифметическая прогрессия. Пусть разность прогрессии равна d. Тогда $\dfrac{x_{2n}-x_n}{x_{n+2}-x_{n-2}}=\dfrac{(2n-n)d}{4d}=\dfrac{n}{4}$.

Ответ: $\dfrac{n}{4}$.

Задача 2. Среди данных чисел не более чем 39 чисел могут быть больше единицы, иначе условие задачи не выполнено. Возьмем 40 чисел, среди которых имеются все числа, большие единицы. Произведение взятых 40 чисел по условию меньше единицы. Все прочие числа меньше единицы. Их произведение тоже меньше единицы. Следовательно, произведение всех чисел также меньше единицы.

Задача 3. Пусть число N записано цифрами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, то есть

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0.$$

Вычтем из числа N сумму его цифр:

$$N-\left(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0\right)=\left(10^n-1\right)a_n+\left(10^{n-1}-1\right)a_{n-1}+\ldots+9a_1.$$

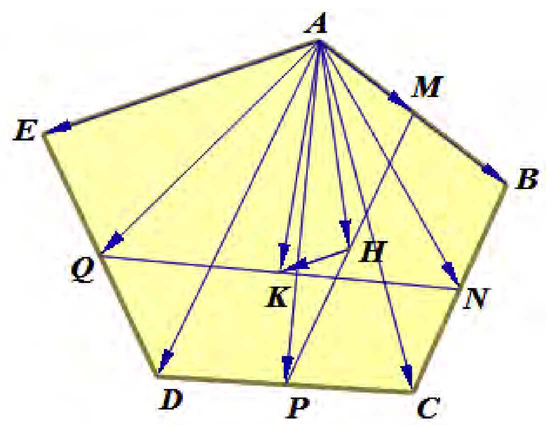
Числа вида 10^k-1 делятся на 9. Значит, число $N-\left(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0\right)$ делится на 9. Следовательно, при делении на 9 каждое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

Пусть в записи числа A встречается n четверок. Тогда двоек там $n+22$, а все оставшиеся цифры – тройки. Сумма цифр равна

$$4\cdot n+2\cdot(n+22)+3\cdot\left(67-2n-22\right)=6n+44+135-6n=179.$$

В свою очередь, сумма цифр числа 179 равна 17. Остаток от деления 17 на 9 равен 8. Такой же остаток от деления на 9 имеет число 179 и, следовательно, число A.

Ответ: 8.



Задача 4. Используем векторы.

$$\overline{HK}=\overline{AK}-\overline{AH}=\frac{1}{2}\left(\overline{AQ}+\overline{AN}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{AM}+\overline{AP}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AE}+\overline{AD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\left(\overline{AC}+\overline{AD}\right)\right)=\frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Значит, $HK=\frac{1}{4}AE=18{,}75$.

Ответ: 18,75.

Задача 5. Группируя слагаемые, получим

$$(x-1)^2\left(y^2+1\right)+y^2+1=4y|x-1|;\quad \left(|x-1|^2+1\right)\left(y^2+1\right)=4y|x-1|.$$

Очевидно, что при $y=0$ или при $x=1$ решений нет. Разделим обе части на $y|x-1|$. Получим:

$$\left(|x-1|+\frac{1}{|x-1|}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=4.$$

При $y<0$ решений нет, значит, $y>0$. Известно[1] (легко показать), что если $a>0$, то $a+\frac{1}{a}\geq 2$, причем равенство достигается, только если $a=1$. Следовательно, правая часть равна 4, только если $|x-1|=1$ и $y=1$.

Ответ: (0, 1), (2, 1).

Задача 6. Предположим, что T – период функции $y=f(x)$. Из условия получаем:

$$\sin x=f(x)-0,4f(x-\pi)=f(x-T)-0,4f(x-T-\pi)=\sin(x-T).$$

Поскольку это равенство верно для всех x, число T является периодом функции $y=\sin x$, т.е. $T=2\pi n,$ где n – некоторое натуральное число. Из данного уравнения получаем:

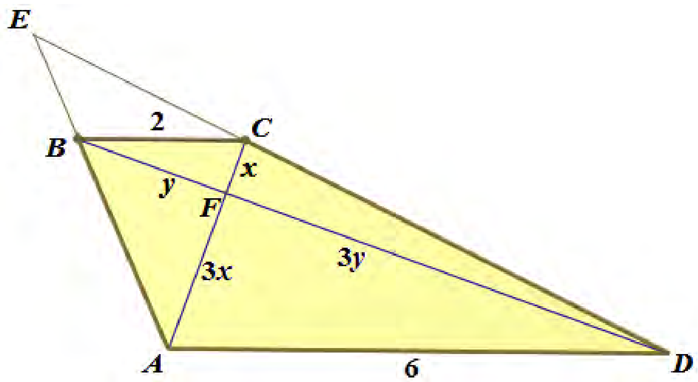
$$\begin{aligned}f(x)&=0,4f(x-\pi)+\sin x=0,4\left(0,4f(x-2\pi)-\sin x\right)+\sin x=\\&=0,4\left(0,4\left(0,4f(x-3\pi)+\sin x\right)-\sin x\right)+\sin x=\\&=\ldots=0,4\left(0,4\left(\ldots\left(0,4f(x-2\pi n)-\sin x\right)+\ldots+\sin x\right)-\sin x\right)+\sin x=\\&=0,4^{2n}f(x)-\sin x\left(0,4^{2n-1}-0,4^{2n-2}+0,4^{2n-3}-\ldots+0,4-1\right).\end{aligned}$$

Тогда

$$f(x)\left(1-0,4^{2n}\right)=\sin x\left(1-0,4+0,4^2-\ldots-0,4^{2n-1}\right)=\sin x\frac{1-0,4^{2n}}{1+0,4}.$$

Следовательно, $f(x)=\frac{5}{7}\sin x$.

Ответ: $f(x)=\frac{5}{7}\sin x$.



Задача 7. Введем обозначения, как на рисунке. Продолжив боковые стороны, обозначим их точку пересечения буквой E. Точку пересечения диагоналей назовем F. Прямоугольные треугольники BFC и AFD подобны и, если обозначить катеты первого x и y, то соответственные катеты второго равны $3x$ и $3y$.

Высота трапеции h складывается из высот треугольников BFC и AFD:

$$h=\frac{BF\cdot FC}{2}+\frac{AF\cdot FD}{6}=\frac{xy}{2}+\frac{9xy}{6}=2xy.$$

[1] Это утверждение является частным случаем неравенства Коши.

Площадь трапеции равна $\frac{8}{9}$ площади треугольника AED. Получаем:

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin 45^\circ=\frac{2\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{3}{2}AB\cdot\frac{3}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB\cdot CD\ ,$$

откуда

$$8xy=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+9y^2}\cdot\sqrt{y^2+9x^2}\ .$$

Учитывая, что $x^2+y^2=4$, находим:

$$8xy=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4+8y^2}\cdot\sqrt{4+8x^2}=2\sqrt{2}\sqrt{\left(1+2y^2\right)\left(1+2x^2\right)}\ .$$

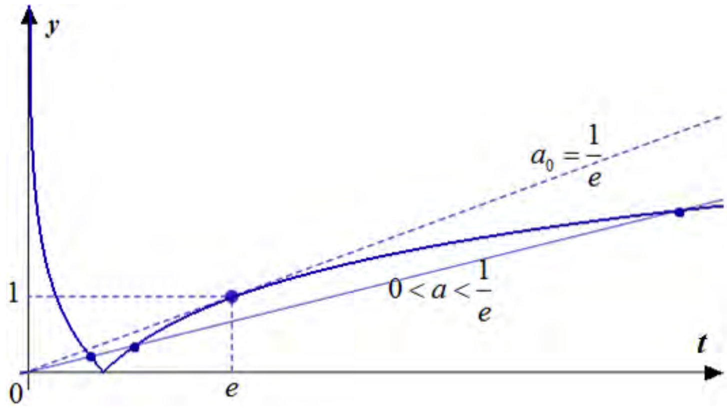
Проведем очевидные преобразования:

$$8x^2y^2=1+2\left(x^2+y^2\right)+4x^2y^2;\quad 4x^2y^2=9;\ 2xy=3\ .$$

Ответ: 3.

Задача 8. Сделаем замену $t=x+1$. Получаем уравнение $\left|\ln|t|\right|=at$, которое также должно иметь три решения. Левая часть неотрицательна. Следовательно, $at\ge 0$. При $a=0$ уравнение имеет два корня -1 и 1. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию.

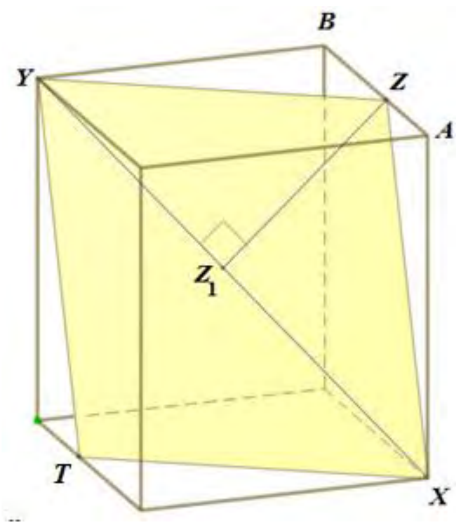
Рассмотрим случай $a>0$. Тогда $t\ge 0$ и поэтому $|t|=t$. Построим график функции $y=|\ln t|$. Прямая $y=at$ должна пересекать этот график в трех точках. На рисунке видно, что это выполняется тогда и только тогда, когда прямая проходит внутри угла, образованного осью абсцисс и касательной $y=a_0t$ к графику функции $y=\ln t$ при $t>1$.



Найдем a_0. Абсцисса точки касания удовлетворяет условиям $a_0t=\ln t$ и $a_0=\frac{1}{t}$, откуда $a_0=\frac{1}{e}$, $t=e$. Таким образом, $0<a<\frac{1}{e}$. Случай $a<0$ симметричен, то есть $-\frac{1}{e}<a<0$.

Ответ. $-\frac{1}{e}<a<0,\ 0<a<\frac{1}{e}$.

Задача 9. На четыре вопроса каждый рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец – три. Всего было получено $42+100+80+68=290$ утвердительных ответов. Если бы все жители города были рыцарями, в сумме всех утвердительных ответов было бы 200. 90 лишних ответов «да» происходят от вранья лжецов. Таким образом, лжецов $\frac{90}{2}=45$.

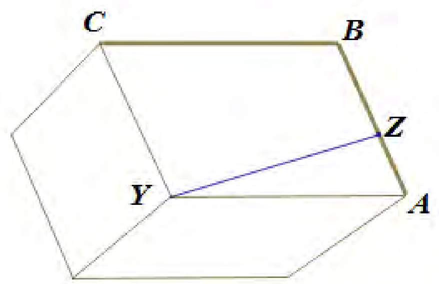


Пусть в квартале А живет k рыцарей, тогда $42-k$ – число утвердительных ответов на первый вопрос, которые дали лжецы. Значит, число лжецов, живущих в квартале А, равно $45-(42-k)=k+3$. В остальных кварталах число лжецов меньше числа рыцарей.

Ответ: в квартале А, на 3 человека.

Задача 10. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед сечениями, равна сумме площади поверхности параллелепипеда и площадей внутренних поверхностей. Сумма площадей внутренних поверхностей равна удвоенной сумме площадей сечений.

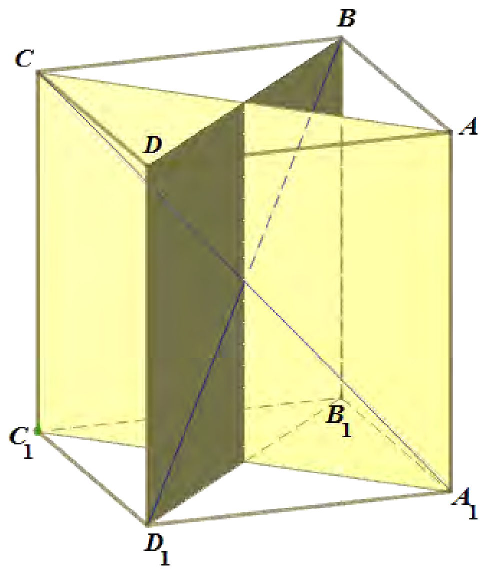
Найдем наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через диагональ XY произвольного параллелепипеда с ребрами $a \le b \le c$. Сечением является параллелограмм $ZXTY$, вершины которого лежат на противоположных ребрах параллелепипеда. Площадь параллелограмма равна произведению длины диагонали XY на расстояние от точки Z до XY.



Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную диагонали XY. На рисунке видно, что расстояние от точки Z ломаной ABC до точки Y, то есть до диагонали XY, наибольшее, если Z совпадает с одной из вершин A, B или C.

Значит, сечение проходит через одно из ребер параллелепипеда. Таким образом, наибольшую площадь имеет одно из диагональных сечений. Все эти сечения являются прямоугольниками. Найдем наибольшую из их площадей

$$S_1 = a\sqrt{b^2+c^2},\ S_2 = b\sqrt{a^2+c^2} \text{ и } S_3 = c\sqrt{b^2+a^2}.$$



Из условия $a \le b \le c$ следует, что, $a^2b^2 + a^2c^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$, и $a^2b^2 + c^2b^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$. Поэтому $S_1 \le S_3$ и $S_2 \le S_3$. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через наибольшее ребро.

По условию наибольшую длину имеет ребро AD, значит, наибольшую площадь, равную $5\sqrt{8^2+6^2}=150$, имеют сечения A_1D_1CB и B_1C_1DA. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед этими сечениями (см. рисунок), равна

$$2(AA_1 \cdot AB + AA_1 \cdot AD + AB \cdot AD) + 4 \cdot 150 = 1116.$$

Ответ: 1116.

Вариант 4 (ответы и решения)

Задача 1. Из соотношения $x_{n-1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}+x_{n-2}}{3}$ получаем: $2x_{n-1}=x_{n-2}+x_n$ для всех $n\geq 3$. Это значит, что данная последовательность – арифметическая прогрессия. Пусть разность прогрессии равна d. Тогда $\dfrac{x_{300}-x_{33}}{x_{333}-x_3}=\dfrac{(300-33)d}{330d}=\dfrac{89}{110}$.

Ответ: $\dfrac{89}{110}$.

Задача 2. Среди данных чисел не более чем 44 числа могут быть меньше единицы, иначе условие задачи не выполнено. Возьмем 45 чисел, среди которых имеются все числа, меньшие единицы. Произведение взятых 45 чисел по условию больше единицы. Все прочие 1969 чисел больше единицы. Их произведение тоже больше единицы. Следовательно, произведение всех чисел также больше единицы.

Задача 3. Пусть число N записано цифрами $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$, то есть

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_1\cdot 10+a_0.$$

Вычтем из числа N сумму его цифр:

$$N-\left(a_n+a_{n-1}+...+a_0\right)=\left(10^n-1\right)a_n+\left(10^{n-1}-1\right)a_{n-1}+...+9a_1.$$

Числа вида 10^k-1 делятся на 9. Значит, число $N-\left(a_n+a_{n-1}+...+a_0\right)$ делится на 9. Следовательно, при делении на 9 каждое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

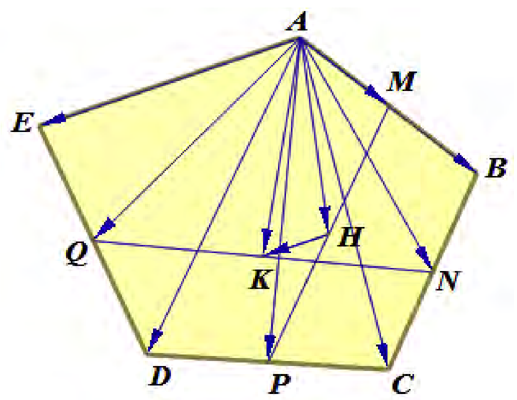
Пусть в записи числа A встречается n пятерок. Тогда троек там $n+11$, а все оставшиеся цифры – четверки. Сумма цифр равна

$$5\cdot n+3\cdot(n+11)+4\cdot\left(57-2n-11\right)=8n+33+184-8n=217.$$

В свою очередь, сумма цифр числа 217 равна 10. Остаток от деления 10 на 9 равен 1. Такой же остаток от деления на 9 имеет число 217 и, следовательно, число A.

Ответ: 1.

Задача 4. Используем векторы.



$$\overline{HK}=\overline{AK}-\overline{AH}=\frac{1}{2}\left(\overline{AQ}+\overline{AN}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{AM}+\overline{AP}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{AE}+\overline{AD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\left(\overline{AC}+\overline{AD}\right)\right)=\frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Значит, $AE=4HK=4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Задача 5. Группируя слагаемые, получим: $(4y^2+1)(x^4+2x^2+2)=8|y|(x^2+1)$.

Очевидно, что при $y=0$ решений нет. Разделим обе части на $2|y|(x^2+1)$:

$$\left(2|y|+\frac{1}{2|y|}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)=4.$$

Известно[1] (легко показать), что если $a>0$, то $a+\frac{1}{a}\geq 2$, причем равенство достигается, только если $a=1$. Следовательно, правая часть равна 4, только если $2|y|=1$ и $x^2+1=1$.

Ответ: $(0, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$.

Задача 6. Предположим, что T – период функции $y=f(x)$. Из условия получаем:

$$\cos x=f(x)-2f(x-\pi)=f(x-T)-2f(x-T-\pi)=\cos(x-T).$$

Поскольку это равенство верно для всех x, число T является периодом функции $y=\cos x$, т.е. $T=2\pi n,$ где n – некоторое натуральное число. Из данного уравнения получаем:

$$f(x)=2f(x-\pi)+\cos x=2\left(2f(x-2\pi)-\cos x\right)+\cos x=$$
$$=2\left(2\left(2f(x-3\pi)+\cos x\right)-\cos x\right)+\cos x=$$
$$=\ldots=2\left(2\left(\ldots\left(2f(x-2\pi n)-\cos x\right)+\ldots+\cos x\right)-\cos x\right)+\cos x=$$
$$=2^{2n}f(x)-\cos x\left(2^{2n-1}-2^{2n-2}+2^{2n-3}-\ldots+2-1\right).$$

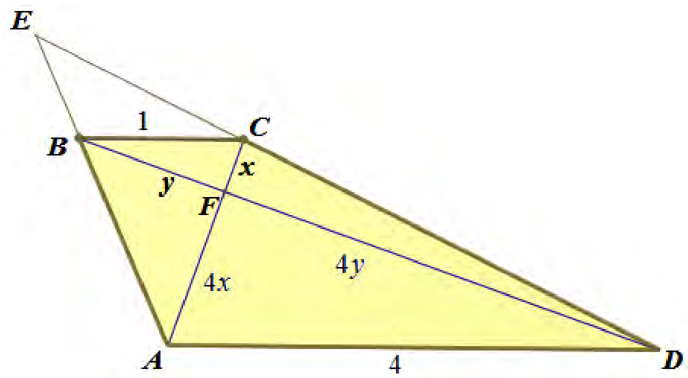
Тогда

$$f(x)\left(1-2^{2n}\right)=\cos x\left(1-2+2^2-\ldots-2^{2n-1}\right)=\cos x\frac{1-2^{2n}}{1+2}.$$

\Следовательно, $f(x)=\frac{1}{3}\cos x$.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{3}\cos x$.

Задача 7. Введем обозначения, как на рисунке. Продолжив боковые стороны, обозначим их точку пересечения буквой E. Точку пересечения диагоналей назовем F. Прямоугольные треугольники BFC и DFA подобны и, если обозначить катеты первого x и y, то соответственные катеты второго равны $4x$ и $4y$.



Высота трапеции h складывается из высот треугольников BFC и AFD:

$$h=\frac{BF\cdot FC}{1}+\frac{AF\cdot FD}{4}=xy+\frac{4x\cdot 4y}{4}=5xy.$$

Площадь трапеции равна $\frac{15}{16}$ площади треугольника AED. Получаем:

---
[1] Это утверждение является частным случаем неравенства Коши.

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin 45^\circ=\frac{15\sqrt{2}}{64}\cdot\frac{4}{3}AB\cdot\frac{4}{3}CD=\frac{5\sqrt{2}}{12}AB\cdot CD\ ,$$

откуда $5xy=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{x^2+16y^2}\cdot\sqrt{y^2+16x^2}$.

Учитывая, что $x^2+y^2=1$, находим: $15\sqrt{2}xy=\sqrt{1+15y^2}\cdot\sqrt{1+15x^2}$.

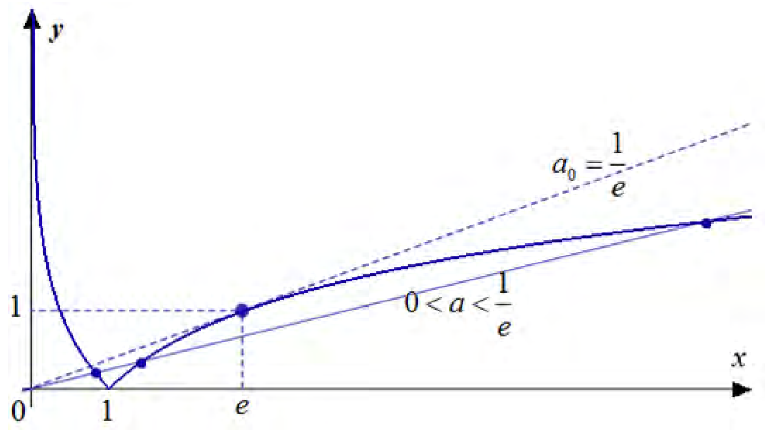
Проведем очевидные преобразования:

$$450x^2y^2=1+15\left(x^2+y^2\right)+225x^2y^2;\quad 225x^2y^2=16;\ 5xy=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 8. Левая часть уравнения неотрицательна. Следовательно, $ax\ge 0$. При $a=0$ уравнение имеет два корня -1 и 1. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию.

Рассмотрим случай $a>0$. Тогда $x\ge 0$ и поэтому $|x|=x$. Построим график функции $y=|\ln x|$. Прямая $y=ax$ должна пересекать этот график в трех точках. На рисунке видно, что это выполняется тогда и только тогда, когда прямая проходит внутри угла, образованного осью абсцисс и касательной $y=a_0x$ к графику функции $y=\ln x$ при $x>1$.



Найдем a_0. Абсцисса точки касания удовлетворяет уравнениям $a_0x=\ln x$, $a_0=\frac{1}{x}$, откуда $a_0=\frac{1}{e}$, $x=e$. Таким образом, $0<a<\frac{1}{e}$.

Случай $a<0$ симметричен, то есть $-\frac{1}{e}<a<0$.

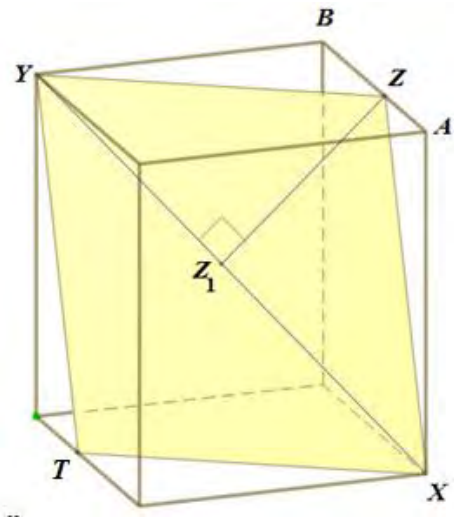
Ответ. $-\frac{1}{e}<a<0,\ 0<a<\frac{1}{e}$.

Задача 9. На четыре вопроса каждый рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец – три. Всего было получено $109+98+104+119=430$ утвердительных ответов. Если бы все жители города были рыцарями, в сумме всех утвердительных ответов было бы 200. 230 лишних ответов «да» происходят от вранья лжецов. Таким образом, лжецов $\frac{230}{2}=115$.

Пусть в квартале Г живет k рыцарей, тогда $119-k$ – число утвердительных ответов на четвертый вопрос, которые дали лжецы. Значит число лжецов, живущих в квартале Г, равно $115-(119-k)=k-4$. В остальных кварталах число лжецов больше числа рыцарей.

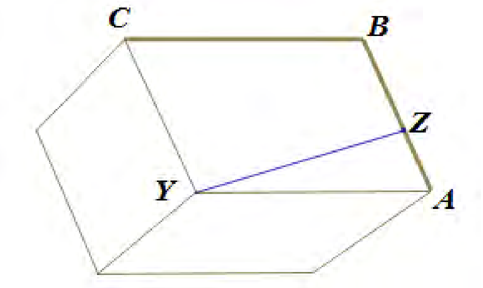
Ответ: в квартале Г, на 4 человека.

Задача 10. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед сечениями, равна сумме площади поверхности параллелепипеда и площадей внутренних поверхностей. Сумма площадей внутренних поверхностей равна удвоенной сумме площадей сечений.



Найдем наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через диагональ XY произвольного параллелепипеда с ребрами $a \le b \le c$. Сечением является параллелограмм $ZXTY$, вершины которого лежат на противоположных ребрах параллелепипеда. Площадь параллелограмма равна произведению длины диагонали XY на расстояние от точки Z до XY.

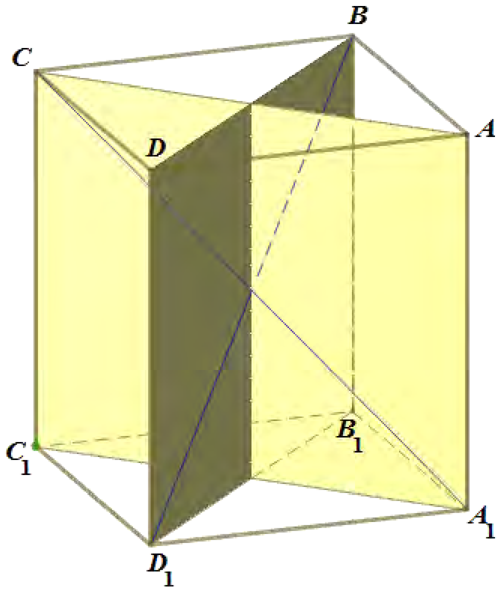
Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную диагонали XY. На рисунке видно, что расстояние от точки Z ломаной ABC до точки Y, то есть до диагонали XY, наибольшее, если Z совпадает с одной из вершин A, B или C.



Значит, сечение проходит через одно из ребер параллелепипеда. Таким образом, наибольшую площадь имеет одно из диагональных сечений. Все эти сечения являются прямоугольниками. Найдем наибольшую из их площадей

$$S_1 = a\sqrt{b^2+c^2},\ S_2 = b\sqrt{a^2+c^2} \text{ и } S_3 = c\sqrt{b^2+a^2}.$$

Из условия $a \le b \le c$ следует, что, $a^2b^2 + a^2c^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$, и $a^2b^2 + c^2b^2 \le c^2b^2 + a^2c^2$. Поэтому $S_1 \le S_3$ и $S_2 \le S_3$. Значит, наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через наибольшее ребро.



По условию задачи наибольшую длину имеет ребро AA_1, значит, наибольшую площадь, равную $10\sqrt{4^2+3^2} = 50$, имеют сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D. Сумма площадей поверхностей многогранников, на которые разбивается параллелепипед этими сечениями (см. рисунок), равна

$$2(AA_1 \cdot AB + AA_1 \cdot AD + AB \cdot AD) + 4 \cdot 50 = 364.$$

Ответ: 364.