Заочный тур олимпиады МГУ по математике «Ломоносов — 2011», 9 и 10 классы

На отдельной странице работы перед решениями задач поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не надо.

Задача	*Ответ*	*Балл*
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		
№10		

В решении задачи оценивается прежде всего математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

Олимпиада МГУ
«Ломоносов — 2011»

Заочное задание по математике для 9 и 10 классов

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое больше суммы своих цифр на 1755 (год основания Московского университета).

2. Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объём больше и насколько?

3. Пройдя 2/5 длины узкого моста, пешеход заметил, что сзади к мосту приближается машина. Тогда он пошел назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы он продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

4. Дано простое число p. Решите в натуральных числах уравнение
$$x^2 = y^2 + 2010p.$$

5. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении $5:2$, считая от вершины. Найти величину этого угла.

6. Сколько решений имеет уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{2}{x^2}$?

7. Даны три точки, расстояния между которыми равны 4, 6 и 7. Сколько существует попарно не равных друг другу треугольников, для которых каждая из этих точек — либо вершина, либо середина стороны?

8. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью – одно, за поражение – ноль?

9. Строго внутри окружности даны различные точки A и B. Где на окружности должна быть расположена точка C, чтобы угол ACB был наибольшим возможным? Укажите все варианты и обоснуйте, что иных нет.

10. Что больше: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}$ или $\frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2011}$?