

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №364

Уровень 2

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

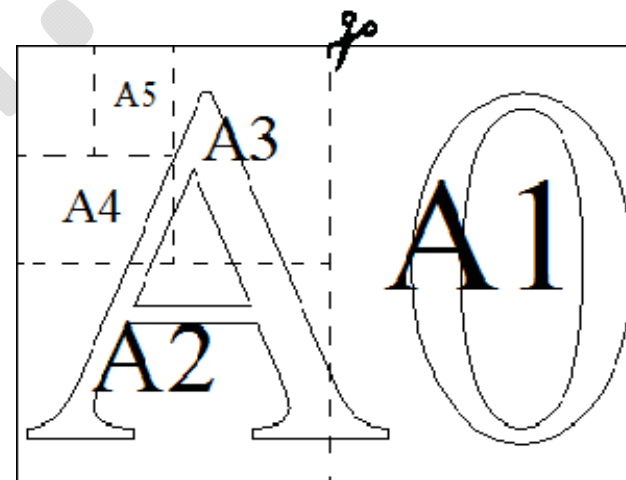
Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой А и цифрой: А0, А1, А2 и так далее. Лист формата А0 имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв. м. Если лист формата А0 разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получается два равных листа формата А1. Если лист А1 разрезать так же пополам, получается два листа формата А2. И так далее.

Отношение большей стороны к меньшей стороне листа каждого формата одно и то же, поэтому листы всех форматов подобны. Это сделано специально для того, чтобы пропорции текста и его расположение на листе сохранялись при уменьшении или увеличении шрифта при изменении формата листа.

1. В таблице даны примерные размеры (с точностью до мм) четырёх листов, имеющих форматы A2, A3, A4 и A6.

Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	594	420
2	420	297
3	148	105
4	297	210

Установите соответствие между форматами и номерами листов. Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других разделительных символов.

Формат	A2	A3	A4	A6
Номер				

Ответ: _____.

2. Сколько листов формата A5 получится из одного листа формата A3?

Ответ: _____.

3. Найдите площадь (см^2) листа формата A4.

Ответ: _____.

4. Найдите длину большей стороны листа бумаги формата A1. Результат округлите до целых.

Ответ: _____.

5. Бумагу формата A1 упаковали в пачки по 80 листов. Найдите массу (в граммах) пачки, если масса листа бумаги площади 1 м^2 равна 120 г.

Ответ: _____.

6. Найдите значение выражения $\frac{2^{\sqrt{12}-1}}{(0,5)^{-\sqrt{12}}}$.

Ответ: _____.

7. Пусть a, b, c – вещественные числа, причём $a, b, c \geq \frac{1}{2}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения:

$$\frac{a+b}{c+1} + \frac{b+c}{a+1} + \frac{c+a}{b+1}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1) 2

2) $\frac{3}{2}$

3) 1

4) $\frac{1}{2}$

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $\left(2 - a + 4a^2 + \frac{5a^2 - 6a + 3}{a-1}\right) : \left(2a + 1 + \frac{2a}{a-1}\right) - 2a$ при

$$a = \sqrt{\frac{13}{6}}.$$

Ответ: _____.

9. Решите в вещественных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0 \\ x + y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

В ответе запишите значение выражения $7x_1 - 7y_1 - 5x_2 + 9y_2 - 3x_3 - 8y_3 - 5x_4 + 9y_4$, где (x_i, y_i) – решение этой системы, причём $x_i \leq x_{i+1}$ и $y_i < y_{i+1}$, если $x_i = x_{i+1}$.

Ответ: _____.

10. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы – квадраты со стороной 100 м, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь (в метрах) должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке А? (Стороны квадрата – тоже улицы).

Ответ: _____.

11. На множестве вещественных чисел $x \in (-\infty; +\infty)$ задана функция $f(x)$, являющаяся полиномом. Причём $f(2) = 8$. Известно, что эта функция при любых вещественных значениях $x \in (-\infty; +\infty)$ удовлетворяет уравнению:

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y)).$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции $f(x)$ и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А) $f(-8)$

Б) $f(5)$

В) $f(-1)$

1) 5

2) -2

3) 11

Ответ: _____.

12. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a , b и c – стороны треугольника, а R – радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите b , если $a = 9$, $c = 10$, $S = 36$ и $R = \frac{85}{8}$.

Ответ: _____.

13. Решите в вещественных числах неравенство (здесь $\sqrt[4]{\alpha}$ – арифметический корень четвёртой степени из α , а $\sqrt{\alpha}$ – арифметический квадратный корень из α):

$$\sqrt[4]{\frac{23+12x}{23-12x}} \geq \sqrt{\frac{287+92x^2}{367}} + \sqrt{\frac{-80+92x^2}{367}}.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1) $x \in \left(-\frac{23}{12}, -\frac{2\sqrt{115}}{23}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{205}}{12}, \sqrt[4]{7}\right]$

2) $x \in \left(-\frac{23}{12}, -\sqrt[4]{7}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{205}}{12}, -\frac{2\sqrt{115}}{23}\right]$

3) $x \in \left[\frac{2\sqrt{115}}{23}, \frac{\sqrt{205}}{12}\right] \cup \left[\sqrt[4]{7}, \frac{23}{12}\right)$

4) $x \in \left[\frac{2\sqrt{115}}{23}, \frac{23}{12}\right] \cup \left[-\sqrt[4]{7}, -\frac{\sqrt{205}}{12}\right]$

Ответ: _____.

14. На постоялом дворе остановился путешественник, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. Но при этом он поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: каждый день хозяин должен был иметь на одно кольцо больше, чем в предыдущий. Замкнутая в кольцо цепочка содержала 11 колец, а путешественник собирался прожить ровно 11 дней, поэтому он согласился. Какое наименьшее число колец он должен распилить, чтобы иметь возможность платить хозяину?

Ответ: _____.

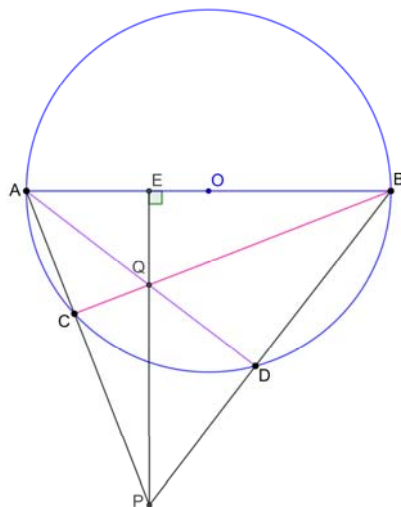
Модуль «Геометрия»

15. Дан треугольник ABC с длинами сторон $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и внутренними углами $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Найдите значение выражения $\frac{(a+b)\sin\gamma}{c\cos(\alpha-\beta)}$.

Ответ: _____.

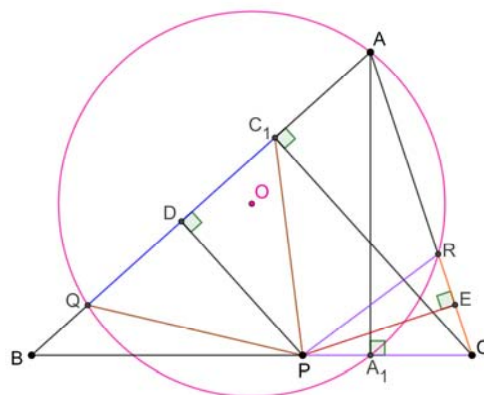
16. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB . Причём длина дуги AD равна сумме длин дуг AC и CD . Прямые AC и BD , а также AD и BC пересекаются в точках P и Q соответственно (см. рис.). Прямые PQ и AB пересекаются в точке E . Найдите градусную меру угла QEB .

Ответ: _____.



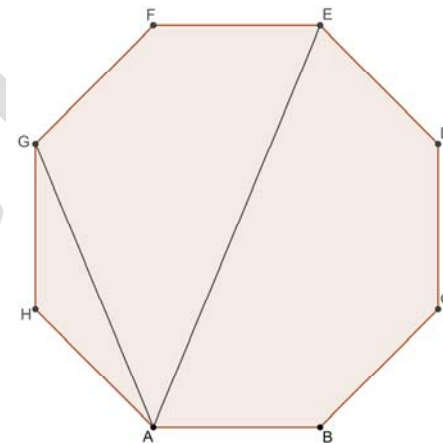
17. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . На стороне BC произвольно отметили точку P , не совпадающую с точками B и C (см. рис.). Точка Q на прямой AB такова, что $QP = C_1P$. Точка R на прямой AC такова, что $PR = PC$. Найдите сумму градусных мер углов RA_1Q и QAR .

Ответ: _____.



18. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$ площадью S . Найдите значение выражения $\frac{S}{AE \cdot AG}$.

Ответ: _____.



19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Все квадраты имеют равные площади.
- 2) Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.
- 3) В остроугольном треугольнике все углы острые.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Пусть целые положительные числа a , b , c такие, что $a^2 + 2b^2 + 4c^2 = k(a + b + c)$. Найдите минимальное значение k такое, чтобы существовало по крайней мере два решения (a, b, c) этого уравнения.

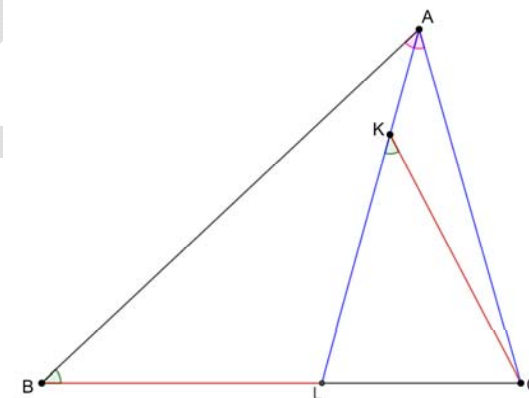
21. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель уже выявился досрочно? (В каждом туре участники разбиваются на пары. Выигрыш – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0).

22. Решите в вещественных числах уравнение (здесь $\lfloor \alpha \rfloor$ – целая часть числа α , причём $\lfloor -0,2 \rfloor = -1$):

$$x^3 - 3 = \lfloor x \rfloor$$

Модуль «Геометрия»

23. На биссектрисе AL треугольника ABC , в котором $AL = AC$, выбрана точка K таким образом, что $CK = BL$ (см. рис.). Найдите значение выражения $\frac{\angle LKC}{\angle CBA}$.



24. На плоскости дано несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

25. Дана окружность ω с центром в точке O , на которой лежат последовательно точки A, B, C, D (см. рис.). Лучи AB и DC пересекаются в точке X . Через точку X провели прямую l перпендикулярно прямой OX . Лучи AC и DB пересекают прямую l в точках F и E соответственно.

Найдите значение выражения $\frac{FX}{XE}$.

