

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №360

Уровень 2

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

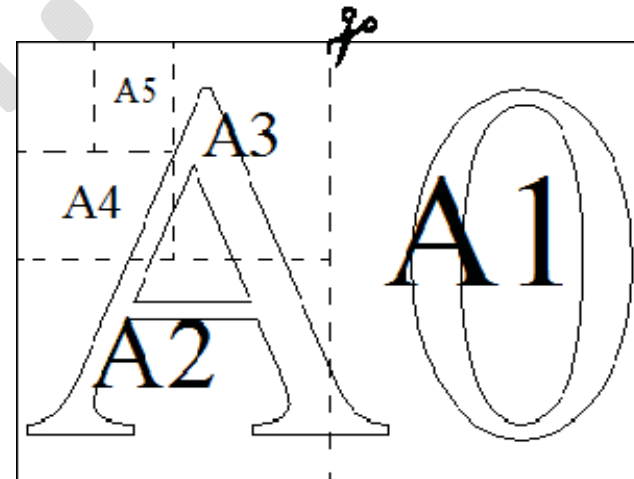
Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой А и цифрой: А0, А1, А2 и так далее. Лист формата А0 имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв. м. Если лист формата А0 разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получается два равных листа формата А1. Если лист А1 разрезать так же пополам, получается два листа формата А2. И так далее.

Отношение большей стороны к меньшей стороне листа каждого формата одно и то же, поэтому листы всех форматов подобны. Это сделано специально для того, чтобы пропорции текста и его расположение на листе сохранялись при уменьшении или увеличении шрифта при изменении формата листа.

1. В таблице даны примерные размеры (с точностью до мм) четырёх листов, имеющих форматы А0, А1, А3 и А4.

Номер листа	Длина (мм)	Ширина (мм)
1	297	210
2	420	297
3	1189	841
4	841	594

Установите соответствие между форматами и номерами листов. Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других разделительных символов.

Формат	А0	А1	А3	А4
Номер				

Ответ: _____.

2. Сколько листов формата А3 получится из одного листа формата А2?

Ответ: _____.

3. Найдите площадь (см²) листа формата А1.

Ответ: _____.

4. Найдите отношение длины большей стороны листа формата А2 к его меньшей стороне. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

5. Бумагу формата А5 упаковали в пачки по 500 листов. Найдите массу (в граммах) пачки, если масса листа бумаги площади 1 м² равна 80 г.

Ответ: _____.

6. Найдите значение выражения $\frac{-51 \sin 385^\circ}{\sin 25^\circ}$.

Ответ: _____.

7. Пусть a, b, c – вещественные положительные числа. Найдите наименьшее возможное значение выражения:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1) 6

2) 5

3) 4

4) 3

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^2-9}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a^2-9}{a}}} \right)^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{4}}$ при $a = 7\sqrt{2} - 3$.

Ответ: _____.

9. Решите в вещественных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14 \end{cases}$$

В ответе запишите значение выражения $9x_1 - 4y_1 + 8z_1 + x_2 + 2y_2 + 2z_2$, где (x_i, y_i, z_i) – решение этой системы, причём $x_i \leq x_{i+1}$ и $y_i < y_{i+1}$, если $x_i = x_{i+1}$.

Ответ: _____.

10. Сколькими различными способами можно разложить натуральное число 15 на сумму трёх целых положительных слагаемых? Два разложения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Ответ: _____.

11. На множестве вещественных чисел $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ задана функция $f(x)$.

Причём $f(1) = 1$. Известно, что эта функция при любых вещественных значениях $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ удовлетворяет уравнению:

$$f\left(yf(x) + \frac{x}{y}\right) = xyf(x^2 + y^2).$$

Также известно, что функция f такая, что для любых x_1 и x_2 из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует равенство $x_1 = x_2$. Установите соответствие между выражениями для значений функции $f(x)$ и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А) $f(10)$

Б) $f(7)$

В) $f(-5)$

1) $\frac{1}{10}$

2) $\frac{1}{5}$

3) $\frac{1}{7}$

Ответ: _____.

12. Среднее геометрическое трёх чисел a , b и c вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 4, 16 и 27.

Ответ: _____.

13. Решите в вещественных числах неравенство (здесь $\sqrt{\alpha}$ – арифметический квадратный корень из α):

$$\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \geq \frac{3}{1+\sqrt{1+x}}.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1) $x \in \left(-1, \frac{7-6\sqrt{2}+\sqrt{85-60\sqrt{2}}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+6\sqrt{2}-\sqrt{85+60\sqrt{2}}}{2}, +\infty\right)$

2) $x \in \emptyset$

3) $x \in \left[\frac{7-6\sqrt{2}+\sqrt{85-60\sqrt{2}}}{2}, \frac{7+6\sqrt{2}-\sqrt{85+60\sqrt{2}}}{2}\right]$

4) $x \in (-\infty, +\infty)$

Ответ: _____.

14. Найдите сумму $6 + 66 + 666 + \dots + 666\dots 6$, где в записи последнего числа присутствуют n шестерок. Эта сумма должна получиться в виде $\frac{a(10^{n+1}-10)}{b} - \frac{an}{c}$. В ответе запишите значение выражения $-5a + 7b - 4c$.

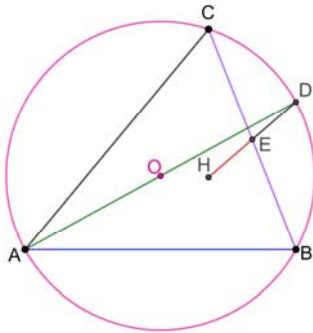
Ответ: _____.

Модуль «Геометрия»

15. Прямые AM и AN симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC (точки M и N лежат на прямой BC). Найдите значение выражения $\frac{AB^2 \cdot CM \cdot CN}{AC^2 \cdot BM \cdot BN}$.

Ответ: _____.

16. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , а AD — диаметр его описанной окружности. Отрезок DH пересекает отрезок BC в точке E . Найдите значение выражения $\frac{CE}{EB}$.



Ответ: _____.

17. На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный треугольник ABE с основанием AB . Пусть M — середина AE , O — точка пересечения AC и BD , K — точка пересечения ED и OM . Найдите значение выражения $\frac{EK}{KO}$.

Ответ: _____.

18. Круг вписан в круговой сектор с углом $\frac{\pi}{3}$. Найдите отношение площади сектора к площади круга.

Ответ: _____.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Через любую точку проходит не менее одной прямой.
- 2) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны 65° , то эти две прямые параллельны.
- 3) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 90° , то эти две прямые параллельны.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Найдите значение выражения $\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{n^2(2n^2-1)}$.

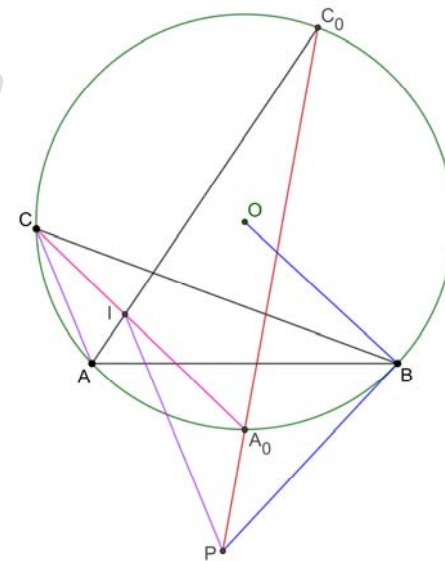
21. В классе 18 детей. Родители решили подарить детям из этого класса торт. Для этого они сначала узнали у каждого ребёнка площадь куска, который он хочет получить. После этого они заказали торт квадратной формы, площадь которого в точности равна сумме 18 названных чисел. Однако, увидев торт, дети захотели, чтобы их куски тоже были квадратными. Родители могут разрезать торт разрезами, параллельными сторонам торта (разрезы не обязаны начинаться или оканчиваться на стороне торта). Для какого наибольшего значения k родители гарантированно могут вырезать из заказанного торта k квадратных кусков, которые можно выдать k детям, чтобы каждый из них получил желаемое?

22. Найдите площадь множества точек, (x, y) , удовлетворяющих неравенству:

$$|3x+6| + |3x+2y-2| < 6$$

Модуль «Геометрия»

23. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно (см. рис.). Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC , пересекается с прямой A_0C_0 в точке P . Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите градусную меру угла OBP .



24. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены попарно подобные треугольники ABC_1 , B_1CA , C_1AB . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

25. На окружности ω с центром в точке O отмечены последовательно точки A , C , B , M таким образом, что M – середина дуги ABC (см. рис). Точка D – ортогональная проекция точки M на прямую AB . Найдите значение выражения $\frac{AD}{DB+BC}$.

