Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №351

Уровень 2

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5

рис. 1

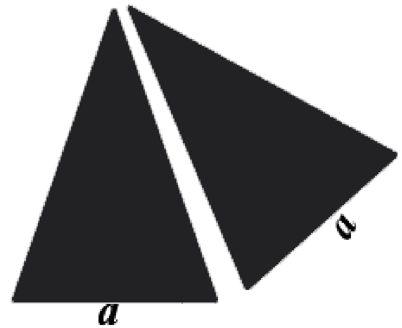

рис. 2

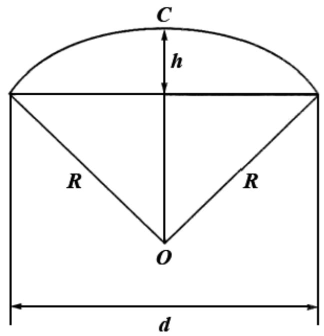

рис. 3

рис. 4

Два друга Петя и Вася задумались о том, как рассчитать площадь поверхности зонта.

На первый взгляд зонт кажется круглым, а его купол напоминает часть сферы (сферический сегмент). Но если присмотреться, то видно, что купол зонта состоит из восьми отдельных клиньев, натянутых на каркас из восьми спиц (см. выше рис. 1). Сферическая форма в раскрытом состоянии достигается за счёт гибкости спиц и эластичности ткани, из которой изготовлен зонт.

Петя и Вася сумели измерить расстояние между концами соседних спиц a (см. выше рис. 2). Оно оказалось равно 40 см. Высота купола зонта h (см. выше рис. 3) оказалась равна 26 см, а расстояние d между концами спиц, образующих дугу окружности, проходящей через вершину зонта, – 104 см.

1. Длина зонта в сложенном виде равна 14 см и складывается из длины ручки (см. выше рис. 4) и пятой части длины спицы (зонт в пять сложений). Найдите длину спицы (в см), если длина ручки зонта равна 2,3 см.

Ответ: ___________________________.

2. «Поскольку зонт сшит из треугольников», – рассуждал Петя, – площадь его поверхности можно найти как сумму площадей треугольников». Вычислите площадь поверхности (в см^2) зонта методом Пети, если высота каждого равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 55 см.

Ответ: ___________________________.

3. Вася предположил, что купол зонта имеет форму сферического сегмента. Вычислите радиус R сферы купола (в см), зная, что $OC = R$ (см. выше рис. 3).

Ответ: ___________________________.

4. Вася нашёл площадь купола зонта как площадь поверхности сферического сегмента по формуле $S = 2\pi Rh$, где R – радиус сферы, а h – высота сегмента. Рассчитайте площадь поверхности купола зонта (в см^2) способом Васи. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _______________________.

5. Рулон ткани имеет длину 30 м и ширину 90 см. На фабрике из этого рулона были вырезаны треугольные клинья для 27 зонтов, таких же, как зонт, который был у Пети и Васи. Каждый треугольник с учётом припуска на швы имеет площадь 1150 см^2. Оставшаяся ткань пошла на обрезки. Сколько процентов ткани рулона пошло на обрезки?

Ответ: _______________________.

6. Найдите значение выражения $\left(5^4\right)^{17} : 5^{70}$.

Ответ: ___________________________.

7. Пусть a, b, c – вещественные положительные числа. Причём $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$.

Найдите наименьшее возможное значение выражения:

$$\frac{b(a+1)(2b+1)}{a(b+1)(5b+1)}+\frac{c(b+1)(2c+1)}{b(c+1)(5c+1)}+\frac{a(c+1)(2a+1)}{c(a+1)(5a+1)}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1) $\frac{5}{2}$ **2)** 2 **3)** $\frac{3}{2}$ **4)** 1

Ответ: ___________________________.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$ при $a=26-15\sqrt{3}$ и $b=-17-15\sqrt{3}$.

Ответ: ___________________________.

9. Решите в действительных числах уравнение (здесь $\sqrt[n]{\alpha}$ – арифметический корень n-й степени из α):

$$5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^{7}}=0.$$

В ответе запишите значение выражения x_1-4x_2, где x_i – корни этого уравнения, причём $x_i<x_{i+1}$.

Ответ: ___________________________.

10. Сколько решений имеет уравнение $a+b+c=100$ в целых неотрицательных числах?

Ответ: ___________________________.

11. На множестве вещественных чисел $x\in(-\infty;\ +\infty)$ задана функция $f(x)$. Известно, что эта функция при любых вещественных значениях $x\in(-\infty;\ +\infty)$ удовлетворяют уравнению:

$$xf(x)+f(1-x)=x.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции $f(x)$ и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А) $f(-4)$ **Б)** $f(4)$ **В)** $f(-7)$

1) $\frac{64}{57}$ **2)** $\frac{9}{13}$ **3)** $\frac{21}{25}$

Ответ: ___________________________.

12. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1=6$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, а $S=19$.

Ответ: ___________________________.

13. Решите в вещественных числах неравенство (здесь $\sqrt{\alpha}$ – арифметический квадратный корень из α):

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1}\le x.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1) $x\in\varnothing$

2) $x\in[-2,\ -1)\cup[0,\ 1]$

3) $x\in(-\infty;\ +\infty)$

4) $x\in(-\infty,\ -2]\cup(-1,\ 0]$

Ответ: ___________________________.

14. Рихарду необходимо разобрать 315 квадратных уравнений. Ежедневно он разбирает на одно и то же количество уравнений больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Рихард разобрал 11 квадратных уравнений, а справился со всеми он за 9 дней. Сколько уравнений Рихард разберёт в последний день?

Ответ: ___________________________.

Модуль «Геометрия»

15. Диагональ AC вписанного в окружность ω четырёхугольника $ABCD$ является диаметром этой окружности. Пусть A_1 и C_1 – проекции точек A и C на прямую BD. Найдите значение выражения $\frac{BA_1}{C_1D}$.

Ответ: ____________________________.

16. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Найдите значение выражения $PQ\cdot\left(\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}\right)$.

Ответ: ____________________________.

17. На сторонах BC и AD четырехугольника $ABCD$ взяты точки M и N соответственно так, что $BM:MC=AN:ND=AB:CD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке O. Найдите количество точек пересечения прямой MN и биссектрисы угла AOD.

Ответ: ____________________________.

18. Центр окружности, касающейся катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC лежит на гипотенузе AB. Найдите диаметр окружности, если он в четыре раза меньше суммы катетов, а площадь треугольника ABC равна 16.

Ответ: ____________________________.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

1) Все углы ромба равны.
2) Любой прямоугольник можно вписать в окружность.
3) Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

21. Натуральные числа a, x, y, большие 100, таковы, что $y^2-1=a^2\left(x^2-1\right)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{x}$?

22. Найдите все вещественные значения параметра a, при каждом из которых уравнение:

$$\left(x^2-6|x|+a\right)^2+10\left(x^2-6|x|+a\right)+26=\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)$$

имеет ровно два различных вещественных корня.

Модуль «Геометрия»

23. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB=BC=CK$ и $\angle KAC=30^\circ$. Найдите градусную меру угла AKB.

24. На плоскости μ находятся прямые l_1, l_2, l_3. Причём прямая l_3 симметрична прямой l_2 относительно прямой l_1, то есть $l_3=S_{l_1}\left(l_2\right)$. Докажите, что $S_{l_3}(X)=S_{l_1}(X)\circ S_{l_2}(X)\circ S_{l_1}(X)$, где $\circ$ – операция композиции симметрий, а X – произвольная точка на плоскости μ.

25. Дан треугольник ABC с ортоцентром H. В нём провели высоту CD. Около треугольника BDC описали окружность ω (см. рис.). К отрезку HD провели серединный перпендикуляр, который пересёк окружность ω в точках P и Q. Найдите сумму градусных мер углов CPA и CQA.