

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №328

Уровень 2

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5

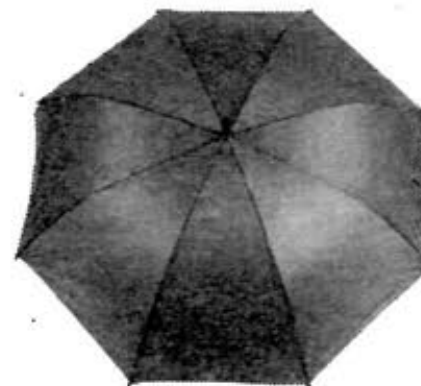


рис. 1

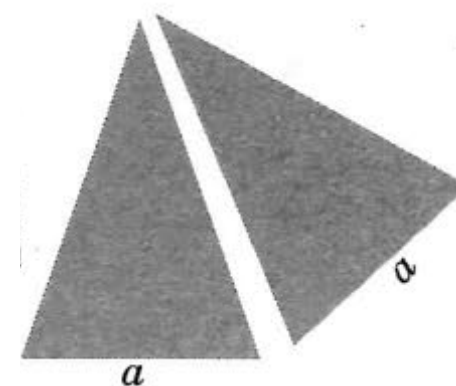


рис. 2

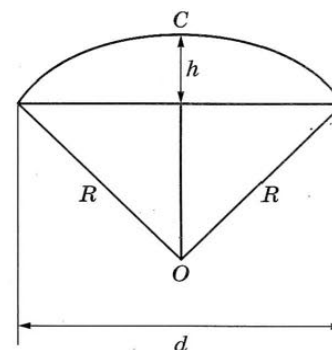


рис. 3



рис. 4

Два друга Петя и Вася задумались о том, как рассчитать площадь поверхности зонта. На первый взгляд зонт кажется круглым, а его купол напоминает часть сферы (сферический сегмент). Но если присмотреться, то видно, что купол зонта состоит из восьми отдельных клиньев, натянутых на каркас из восьми спиц (см. выше рис. 1). Сферическая форма в раскрытом состоянии достигается за счёт гибкости спиц и эластичности ткани, из которой изготовлен зонт.

Петя и Вася сумели измерить расстояние между концами соседних спиц a (см. выше рис. 2). Оно оказалось равно 38 см. Высота купола зонта h (см. выше рис. 3) оказалась равна 25 см, а расстояние d между концами спиц, образующих дугу окружности, проходящей через вершину зонта, – 100 см.

1. Длина зонта в сложенном виде равна 25 см и складывается из длины ручки (см. выше рис. 4) и трети длины спицы (зонт в три сложения). Найдите длину спицы (в см), если длина ручки зонта равна 6,2 см.

Ответ: _____.

2. Поскольку зонт шит из треугольников, рассуждал Петя, площадь его поверхности можно найти как сумму площадей треугольников. Вычислите площадь поверхности (в см^2) зонта методом Пети, если высота каждого равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 53,1 см. Ответ округлите до десятков.

Ответ: _____.

3. Вася предположил, что купол зонта имеет форму сферического сегмента. Вычислите радиус R сферы купола (в см), зная, что $OC = R$ (см. выше рис. 3).

Ответ: _____.

4. Вася нашёл площадь купола зонта как площадь поверхности сферического сегмента по формуле $S = 2\pi Rh$, где R – радиус сферы, а h – высота сегмента. Рассчитайте площадь поверхности купола зонта (в см^2) методом Васи. Число π округлите до 3,14. Ответ округлите до целого числа.

Ответ: _____.

5. Рулон ткани имеет длину 35 м и ширину 80 см. На фабрике из этого рулона были вырезаны треугольные клинья для 29 зонтов, таких же, как зонт, который был у Пети и Васи. Каждый треугольник с учётом пропуска на швы имеет площадь 1050 см^2 . Оставшаяся ткань пошла на обрезки. Сколько процентов ткани рулона пошло на обрезки?

Ответ: _____.

6. Найдите значение выражения $7\frac{1}{4} : \frac{1}{4}$.

Ответ: _____.

7. Пусть a , b , c – действительные положительные числа. Найдите наименьшее значение выражения:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1) 18

2) 21

3) 24

4) 27

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $\frac{\frac{a-b}{2a-b} - \frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)} \cdot (b^2+b+ab+a)$ при

$$a = \sqrt{37} \text{ и } b = \frac{1+10\sqrt{37}}{4}.$$

Ответ: _____.

9. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x-y}=\frac{36}{7} \\ x-y+\frac{1}{x+y}=\frac{36}{5} \end{cases}$$

В ответе запишите значение выражения $13x_1+8y_1+5x_2-4y_2$, где $(x_i; y_i)$ – решение этой системы, причём $x_i \leq x_{i+1}$ и $y_i < y_{i+1}$, если $x_i = x_{i+1}$.

Ответ: _____.

10. Дано дерево с n вершинами, $n \geq 2$. В его вершинах расставлены числа x_1, x_2, \dots, x_n , а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех рёбрах. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{\sqrt{n-1}}{S} \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Ответ: _____.

11. На множестве действительных чисел $x \in (-\infty; +\infty)$ задана функция $f(x)$. Известно, что $g(x) = 2x - 7$. Также известно, что эти функции при любых действительных значениях $x \in (-\infty; +\infty)$ удовлетворяет уравнению:

$$f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 1.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции $f(x)$ и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А) $f(10)$

Б) $f(0)$

В) $f(-10)$

1) 13

2) 43

3) 273

Ответ: _____.

12. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = I^2 R t$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 2$ с, $I = 6$ А и $R = 5$ Ом.

Ответ: _____.

13. Решите в действительных числах неравенство:

$$(x^4 + 1 - 4x)(x^8 + (1 - 4x)^2)(x^{12} + (1 - 4x)^3) \geq 4(x^{24} + (1 - 4x)^6).$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

- 1) $\left(-\infty; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 2) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
 3) $\left\{-\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 1}{\sqrt{2}}\right\}$ 4) $\left(-\infty; -\frac{1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$

Ответ: _____.

14. Служившему в 18-м веке воину было дано вознаграждение: за первую рану 1 копейка, за другую — 2 копейки, за третью — 4 копейки и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 коп. Спрашивается число его ран.

Ответ: _____.

Модуль «Геометрия»

15. В треугольник с основанием 4 и высотой 6 вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите длину стороны квадрата.

Ответ: _____.

16. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота CD . Угол BAC равен $\arctg 2$. Радиус окружности, проходящей через точки A , C и D , равен 8. Найдите площадь треугольника ABC .

Ответ: _____.

17. Найдите высоту трапеции со сторонами 10, 10, 10 и 26.

Ответ: _____.

18. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 12, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O . Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

Ответ: _____.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.
- 2) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.
- 3) Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

21. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух цифр этого числа. Например, очень счастливым является число 3140. Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

22. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (ay + ax - 2)(4y - 3|x - a| + x - 5a) = 0 \\ \sqrt{x^2 y^2} + 4a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 6 различных решений.

Модуль «Геометрия»

23. Дан четырехугольник $ABCD$. Пусть $u = AD^2$, $v = BD^2$, $w = CD^2$, $U = BD^2 + CD^2 - BC^2$, $V = AD^2 + CD^2 - AC^2$, $W = AD^2 + BD^2 - AB^2$. Найдите значение выражения $\frac{uU^2 + vV^2 + wW^2 - UVW}{uvw}$.

24. Касательная в точке B к описанной окружности ω треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K . Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности ω . Докажите, что BD — симедиана треугольника ABC .

25. В окружность радиуса R вписан многоугольник площади S , содержащий центр окружности, и на его сторонах выбрано по точке. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{PR}{S}$, где P — периметр выпуклого многоугольника с вершинами в выбранных точках.