

## Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

## Тренировочный вариант №306

## Уровень 2

## Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

**Желаем успеха!**

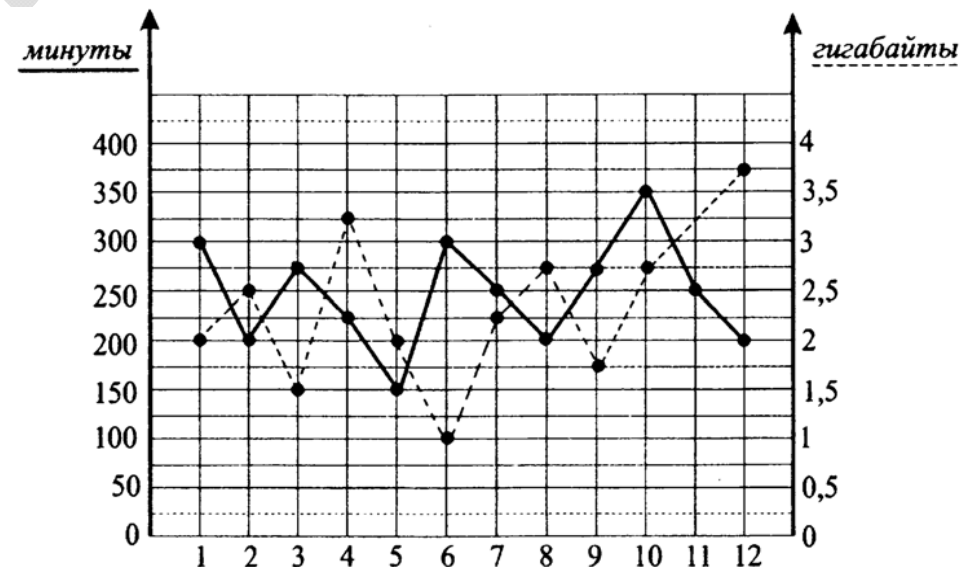
## Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

## Модуль «Алгебра»

## Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5

На рисунке точками показано количество минут исходящих вызовов и трафик мобильного интернета в гигабайтах, израсходованных абонентом в процессе пользования смартфоном, за каждый месяц 2020 года. Для удобства точки, соответствующие минутам и гигабайтам, соединены сплошными и пунктирными линиями соответственно.



В течение года абонент пользовался тарифом «Популярный», абонентская плата по которому составляла 500 рублей в месяц. При условии нахождения абонента на

территории РФ в абонентскую плату тарифа «Популярный» входит:

- пакет минут, включающий 300 минут исходящих вызовов на номера, зарегистрированные на территории РФ;
- пакет интернета, включающий 4 гигабайта мобильного интернета;
- пакет SMS, включающий 100 SMS в месяц;
- безлимитные бесплатные входящие вызовы.

Стоимость минут, интернета и SMS сверх пакета тарифа указана в таблице.

Исходящие вызовы	3,5 руб./мин
Мобильный интернет (пакет)	100 рублей за 0,5 Гб
SMS	3 руб./шт.

Абонент не пользовался услугами связи в роуминге. За весь год абонент отправил 98 SMS.

**1.** Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице трафику мобильного интернета. Заполните таблицу. В ответе запишите числа, соответствующие номерам месяцев, без пробелов, запятых и других разделительных символов (например, для месяцев: май, январь, ноябрь, август в ответ нужно записать число 51118).

Мобильный интернет	1 Гб	2,5 Гб	3,75 Гб	1,5 Гб
Номер месяца				

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.** Сколько рублей потратил абонент на услуги связи в сентябре?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.** Сколько месяцев в 2020 году абонент не превышал лимит ни по пакету минут, ни по пакету мобильного интернета?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.** Известно, что в 2019 году абонентская плата по тарифу «Популярный» составляла 400 рублей. На сколько процентов выросла абонентская плата в 2020 году по сравнению с 2019 годом?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.** В конце 2020 года оператор связи предложил абоненту перейти на новый тариф, условия которого приведены в таблице.

1	Стоимость перехода на тариф	0 рублей
2	Абонентская плата в месяц	450 рублей
3	Пакеты, входящие в абонентскую плату	х
3.1	Пакет исходящих вызовов	300 минут
3.2	Пакет мобильного интернета	3,5 Гб
3.3	Пакет SMS	90 SMS
4	Стоимость услуг после расходования пакетов	х
4.1	Входящие вызовы	0 руб./мин
4.2	Исходящие вызовы	4 руб./мин
4.3	Мобильный интернет	180 руб. за 0,5 Гб
4.4	SMS	3 руб./шт.

Абонент решает, перейти ли ему на новый тариф, посчитав, сколько бы он потратил на услуги связи за 2020 г., если бы пользовался им. Если получится меньше, чем он потратил фактически за 2020 г., то абонент примет решение сменить тариф.

Перейдёт ли абонент на новый тариф? В ответе запишите ежемесячную абонентскую плату по тарифу, который выберет абонент на 2021 год.

Ответ: \_\_\_\_\_.

6. Найдите значение выражения  $\left(\frac{3}{64} \cdot 5\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + (-1)^5$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

7. Пусть  $a, b, c, d$  – действительные положительные числа. Найдите наименьшее значение выражения:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)(a+d)}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1)  $\frac{1}{5}$

2)  $\frac{1}{4}$

3)  $\frac{1}{3}$

4)  $\frac{1}{2}$

Ответ: \_\_\_\_\_.

8. Найдите значение выражения:

$$\frac{a^3 - a - 2b - b^2 a^{-1}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2 b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right) \text{ при } a = 23 \text{ и } b = 22.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

9. Решите в действительных числах уравнение:

$$\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2.$$

В ответе запишите значение выражения  $-2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 2x_4$ , где  $x_i$  – решение этой системы, причём  $x_i < x_{i+1}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. Функция  $f(x)$  определена для всех действительных значений и при любых действительных значениях удовлетворяет равенству:

$$f(x) + (x-2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции  $f(x)$  и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А)  $f(-19)$

Б)  $f(-20)$

В)  $f(-15)$

1)  $-6839$

2)  $-7979$

3)  $-3359$

Ответ: \_\_\_\_\_.

12. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 150 рублей. Если поездка длится 5 минут или более, то её стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле  $C = 150 + 11(t - 5)$ , где  $t$  – длительность поездки, выраженная в минутах. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 10-минутной поездки. Ответ укажите в рублях.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**13.** Решите в действительных числах неравенство:

$$\frac{x^3 - 69x}{3 - 31x} - \frac{7x + 33}{x^3 + 27} \leq 1.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

1)  $(-\infty; -6] \cup (-3; -2] \cup \left[-1; \frac{3}{31}\right) \cup [1; 3] \cup [5; +\infty)$

2)  $\left(-3; \frac{3}{31}\right)$

3)  $(-\infty; -6] \cup [-2; -1] \cup [1; 3] \cup [5; +\infty)$

4)  $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{31}; +\infty\right)$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**14.** Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Сколько бактерий окажется в организме через 4 часа, если по истечении четвёртого часа в организм из окружающей среды попала ещё одна бактерия?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Модуль «Геометрия»**

**15.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 10$ ,  $BC = 24$ , а медиана  $BD$  равна 13. Окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $BDC$ , касаются медианы  $BD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите  $MN$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**16.** Две окружности радиуса  $r$  касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса  $R$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найдите радиус  $r$ , если  $AB = 12$ ,  $R = 8$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**17.** В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите значение выражения

$$\frac{S \cdot C}{S_0 \cdot P},$$

где  $S$  – площадь трапеции,  $P$  – периметр трапеции,  $S_0$  – площадь круга,  $C$  –

длина окружности.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**18.** Точка  $M$  делит сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в отношении  $2:5$ , считая от точки  $A$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACM$  к площади треугольника  $BCM$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**19.** Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) Все диаметры окружности равны между собой.
- 3) Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Часть 2**

*При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.*

**Модуль «Алгебра»**

**20.** Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y + z = 3 \\ \frac{1}{y} + z + x = 3 \\ \frac{1}{z} + x + y = 3 \end{cases}$$

**21.** Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильмов – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивается следующим образом: отбрасываются наибольшая и наименьшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок. Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

**22.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство:

$$(x - a - 2)(x^2 - (a^2 + 5a - 3)x + 5a^3 - 2a^2 - 5a + 2) \leq 0$$

имеет не более одного положительного решения.

**Модуль «Геометрия»**

**23.** На стороне  $AB$  четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $A_1$  и  $B_1$ , а на стороне  $CD$  – точки  $C_1$  и  $D_1$ , причём  $AA_1 = BB_1 = \frac{3}{7}AB$  и  $CC_1 = DD_1 = \frac{3}{7}CD$ . Найдите отношение площади четырехугольника  $ABCD$  к площади четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ .

**24.** На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник, причём его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

**25.** Пусть  $A_1$  и  $B_1$  – проекции точки  $P$  описанной окружности треугольника  $ABC$  на прямые  $BC$  и  $AC$ . Длина отрезка  $A_1B_1$  равна 8. Найдите длину проекции отрезка  $AB$  на прямую  $A_1B_1$ .