

С3 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{(\sqrt{5}x^8 + 3x^{-8} - 5) - a}{a - (2 \cos \sqrt{x-1} - 3)} \leq 0 \quad \text{не имеет решений.}$$

Ответ:

$$-1 \leq a < 2\sqrt[4]{45} - 5.$$

//Решение:

1. Преобразуем неравенство к виду $\frac{a - f(x^8)}{a - g(x)} \geq 0$,

где $g(x) = 2 \cos \sqrt{x-1} - 3$, $x \geq 1$, $f(t) = \sqrt{5}t + \frac{3}{t} - 5$, $t = x^8 \geq 1$.

2. Исследуем функцию f : ее производная

$$f'(t) = \sqrt{5} - \frac{3}{t^2} = \frac{\sqrt{5}(t-t_0)(t+t_0)}{t^2} \quad \text{равна нулю в точке} \quad t_0 = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}} > 1,$$

отрицательна при $1 < t < t_0$ и положительна при $t > t_0$, поэтому

$$f_{\text{наим}} = f(t_0) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3}} - 5 = 2\sqrt[4]{45} - 5.$$

3. Наибольшее значение функции g достигается, например, в точке $x_0 = 1$ и равно $g_{\text{наиб}} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

4. При любом значении $x \geq 1$ справедлива оценка $g(x) < f(x^8)$, так как

$$g(x) \leq -1 = 2 \cdot 2 - 5 < 2\sqrt[4]{45} - 5 \leq f(x^8).$$

Поэтому при $x \geq 1$ исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} a < g(x) \\ a \geq f(x^8) \end{cases}$$

(при $x < 1$ оно не выполняется).

5. Исходное неравенство не выполняется ни при одном значении x тогда и только тогда, когда $g_{\text{наиб}} \leq a < f_{\text{наим}} \Leftrightarrow -1 \leq a < 2\sqrt[4]{45} - 5$.

Ответ: $-1 \leq a < 2\sqrt[4]{45} - 5$.

Замечание. Исследование функции f на экстремум в пункте 2 решения можно провести с помощью неравенства для средних:

$$f(x^8) \geq 2\sqrt{(\sqrt{5}x^8) \cdot (3x^{-8})} - 5 = 2\sqrt[4]{45} - 5 = f(x_0^8),$$

где $\sqrt{5}x_0^8 = 3x_0^{-8} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[16]{\frac{3}{\sqrt{5}}}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Получен правильный ответ. Приведено полное и верное решение, отвечающее следующим требованиям: 1) показано, что все значения параметра, включенные в ответ, обладают описанным в задаче свойством; 2) показано, что остальные значения параметра не обладают описанным в задаче свойством; 3) при этом а) получены необходимые оценки для функций; б) проверена достижимость оценки функции f на области определения функции g .
3	Получен ответ, представляющий собой промежуток для значений параметра с верными концами, но, возможно, с неточными неравенствами, т.е. строгими (нестрогими) вместо нестрогих (строгих). Приведено решение, отвечающее требованиям 1), 2) и 3а).
2	Получен ответ, представляющий собой промежуток для значений параметра, который: - либо содержится в верном промежутке (возможно, с неточными неравенствами), при этом приведено решение, отвечающее требованию 1); - либо содержит верный промежуток (возможно, с неточными неравенствами), при этом приведено решение, отвечающее требованию 2).
1	Ответ, возможно, не получен или неправильный. Приведено решение, отвечающее хотя бы одному из требований 1), 2) или 3а).
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.