Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 529

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

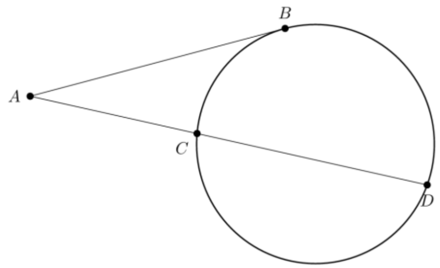
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены касательная AB (где B — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках C и D, причём точка C лежит между A и D. Длина касательной AB равна 6, а отрезок CD (внутренняя часть секущей) равен 5. Найдите длину всей секущей AD.

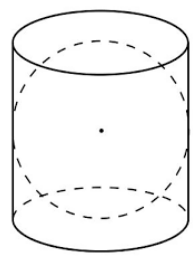


Ответ: ________________________.

2. Вектор $\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}(-5;12)$. Длина вектора $\vec{b}$ равна 26. Найдите сумму координат вектора $\vec{b}$, если известно, что его ордината — отрицательная.

Ответ: ________________________.

3. Цилиндр описан около шара (шар касается оснований и боковой поверхности цилиндра). Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.



Ответ: ________________________.

4. Биатлонист выполняет серию из 5 выстрелов по мишеням. Вероятность попадания при каждом выстреле равна вероятности промаха, и оба этих значения равны 0,5. Все выстрелы независимы. Какова вероятность того, что он поразит хотя бы 4 мишени?

Ответ: ________________________.

5. Есть 4 кубика. На трех из них окрашена белым половина граней, а на четвертом кубике всего одна грань из шести белая. Наудачу выбранный кубик подбрасывается семь раз. Найти вероятность того, что был выбран четвертый кубик, если при семи подбрасываниях белая грань выпала ровно один раз. Ответ округлите до десятых.

Ответ: ________________________.

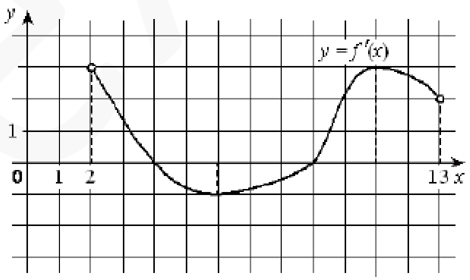
6. Решите уравнение $\log_7(12-x^2)=\log_7(-x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Ответ: ________________________.

7. Найдите значение выражения $36\sin\frac{7\pi}{18}-48\sin^3\frac{7\pi}{18}$.

Ответ: ________________________.

8. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(2;13)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Ответ: ________________________.

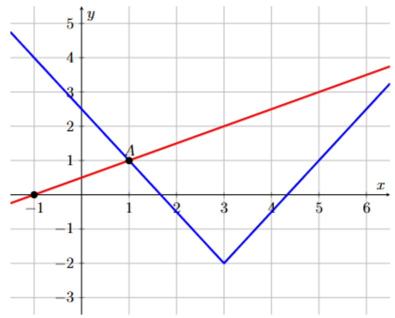
9. Для получения на экране увеличенного изображения предмета используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием f = 20 см. Расстояние d_1 от линзы до предмета может изменяться в пределах от 25 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 50 см до 80 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Линейное увеличение линзы Γ определяется как отношение расстояния до изображения к расстоянию до предмета: $\Gamma=\frac{d_2}{d_1}$. Определите, в каких пределах может изменяться увеличение Γ, чтобы изображение оставалось чётким. В ответе укажите наименьшее возможное значение Γ.

Ответ: ________________________.

10. Из сосуда, содержащего 10 кг раствора кислоты некоторой концентрации, отлили 2 кг содержимого и долили 2 кг воды. После тщательного перемешивания из сосуда снова отлили 5 кг раствора и долили 5 кг раствора той же кислоты, но с концентрацией 36%. В результате концентрация раствора в сосуде стала равна первоначальной. Найдите первоначальную концентрацию раствора (в процентах).

Ответ: ________________________.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x)=a|x+b|+c$ и $g(x)=kx+d$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ________________________.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2-1)e^{x^2}$ на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $\left(2\sin x+2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\right)\cdot\log_5(-\sin x)=0$.

Б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания AB равна 6, а высота пирамиды SO равна 6. На боковом ребре SC отмечена точка K так, что SK:KC=1:2. Плоскость γ проходит через точки A и K параллельно диагонали основания BD.

А) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью γ является четырехугольником, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

Б) Найдите объем пирамиды, вершина которой — точка C, а основание — сечение данной пирамиды плоскостью γ.

15. Решите неравенство:

$$\frac{\log_{1-2x}\left(x^4+x^3-5x+7\right)-\log_{1-2x}\left(x^4+x^3-3x+4\right)}{4^x-12\cdot 2^x+32}\geq 0.$$

16. В июле планируется взять кредит в банке на срок 6 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит 3,2 млн рублей, а общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 16,2 млн рублей.

17. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Пусть r и r_1 — радиусы этих окружностей, а h — высота треугольника ABC, проведенная из вершины B к стороне AC.

А) Докажите, что $\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}=\dfrac{2}{h}$.

Б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника AIC равна 10, а площадь треугольника AJC равна 15.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2|x|+a^2|x|-4a|x|-ax^2-a^3+5a^2+x^2-4a\right)\cdot\sqrt{4-x^2}=0$$

имеет 5 или 6 различных корней.

19. Назовем **цифровым эхом** натурального числа произведение суммы его цифр на количество цифр в этом числе. Число называется гармоничным, если оно делится на своё **цифровое эхо** без остатка. Например, для числа 135 количество цифр равно 3, сумма цифр 1+3+5=9.

Его цифровое эхо равно 3·9=27. Так как 135 делится на 27 (135=5·27), число 135 является гармоничным.

А) Может ли трёхзначное число, составленное из трёх различных нечётных цифр, быть гармоничным?

Б) Существует ли четырёхзначное гармоничное число, у которого все цифры различны и нечётны?

В) Найдите наименьшее гармоничное число, большее 1000.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

