

- 16 В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.
- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
- б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

Ответ: б) 1.

- 16 Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .
- а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.
- б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{12}{5}$.

Ответ: б) $\frac{13}{12}$.

- 16 Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .
- а) Докажите, что $CO = KO$.
- б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

Ответ: б) 4:5.

- 16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.
- а) Докажите, что $AM = DM$.
- б) Найдите угол BAD , если угол ADC равен 55° , а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC .

Ответ: б) 80° .

- 16 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках S и M .
- а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
- б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

Ответ: б) 20.

- 16 Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках M и K , причём точка A лежит между точками M и K .
- а) Докажите, что треугольники MBK и O_1AO_2 подобны.
- б) Найдите расстояние от точки B до прямой MK , если $MK = 7$, а $O_1O_2 = 5$.

Ответ: б) $\frac{84}{25}$.

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K .

Найдите отношение $QK : KA$.

Ответ: б) 1 : 4.

16 Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается её боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

Ответ: б) 18.

16 В треугольник ABC , в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CO .

а) Докажите, что точки A, B, O и B_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

Ответ: б) 18.