

**17 ТР № 100.** Решите неравенство  $\log_x \left( \frac{100}{x} \right) \leq \sqrt{\log_x (100x^5)}$ .

Ответ:  $\left( 0; \frac{1}{\sqrt[5]{100}} \right] \cup [\sqrt{10}; +\infty)$ .

Решение:

В логарифмах перейдем к десятичному основанию:  $\sqrt{\frac{5 \lg x + 2}{\lg x}} \geq \frac{2 - \lg x}{\lg x}$ .

Введем переменную  $t$ ,  $t = \lg x$ . Тогда:  $\sqrt{\frac{5t + 2}{t}} \geq \frac{2 - t}{t}$ .

Пусть  $\frac{2-t}{t} < 0 \Leftrightarrow \frac{t-2}{t} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > 2 \end{cases}$ . В таком случае будем иметь:  $\begin{cases} t < 0 \\ t > 2 \\ t + \frac{2}{t} - \frac{5}{t} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > 2 \\ t \leq -\frac{2}{5} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{2}{5} \\ t > 2 \end{cases}$$

Значит,  $\begin{cases} \lg x \leq -\frac{2}{5} \\ \lg x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \leq \lg \frac{1}{\sqrt[5]{100}} \\ \lg x > \lg 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{\sqrt[5]{100}} \\ x > 100 \end{cases}$ .

Мы получили часть искомого решения.

Пусть теперь  $\frac{2-t}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t-2}{t} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 2$ . Тогда:  $\begin{cases} \frac{5t+2}{t} \geq \frac{4-4t+t^2}{t^2} \\ 0 < t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5t^2 + 2t - 4 + 4t - t^2}{t^2} \geq 0 \\ 0 < t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 + 6t - 4 \geq 0 \\ 0 < t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{-3 - \sqrt{9+16}}{4} \\ t \geq \frac{-3+5}{4} \\ 0 < t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ t \geq \frac{1}{2} \\ 0 < t \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 2.$$

Перейдем к переменной  $x$ .  $\frac{1}{2} \leq \lg x \leq 2 \Leftrightarrow \lg \sqrt{10} \leq \lg x \leq \lg 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10} \leq x \leq 100.$$

Нами получена другая часть решения.

Объединим результаты:  $\left( 0; \frac{1}{\sqrt[5]{100}} \right] \cup [\sqrt{10}; +\infty)$ .