Московский Государственный технический
Университет имени Н.Э.Баумана
Специализированный учебно-научный центр
Лицей № 1580 при МГТУ имени Н.Э. Баумана

А.П. Власова
Н.И. Латанова
Н.В. Евсеева

Показательная и логарифмическая функции в задачах и примерах

Москва 2010

УДК 517.562
ББК 22.161.5
В58

Рецензенты: к.т.н., доцент МГТУ имени Н.Э.Баумана Русакова З.Н.

Власова А.П, Латанова Н.И. Евсеева Н.В.
Показательная и логарифмическая функции в задачах и примерах.

Настоящее учебное пособие является продолжением учебного пособия «Показательная и логарифмическая функции**.** Решение уравнений, неравенств и систем», Изд-во «Олита» 2003, дополненное задачами для самостоятельного решения.

Рассматриваются свойства показательной и логарифмической функций, методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем. Приводятся решения задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГТУ им. Н.Э.Баумана, МГУ, МАИ, МФТИ, МЭИ.

Для преподавателей математики и учащихся профильных школ при технических университетах, преподавателей и слушателей подготовительных курсов, абитуриентов.

Пособие расчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку школьников и абитуриентов к ЕГЭ.

ISBN 5-98040-048-6

Глава I. Показательная функция

§1.1. Определение, свойства, графики показательной функции

Показательной функцией с основанием а (а>0,а $\neq$1) называется функция, заданная формулой $y = a^x$.

Общие свойства показательной функции.

1) Область определения функции – множество R всех действительных чисел. $D_y : R$.

2) Область значений – множество R + всех действительных положительных чисел $E_y : (0;+\infty)$.

3) Показательная функция имеет асимптоту, которой является прямая ОХ (У=0)

4) Показательная функция является непрерывной функцией, монотонно убывающей или монотонно возрастающей, непериодической, общего вида.

5) Все показательные функции, независимо от а, пересекают ось у в точке (0;1).

Следующие свойства показательной функции выражают основные свойства степеней (а>0,b>0):

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\left(ab\right)^x = a^x b^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^0 = 1$$

Показательная функция с основанием а=е, где е – число, приближенно равное е≅ 2,718… называется экспонентой.

Свойства показательной функции при а>1, (рис. 1).

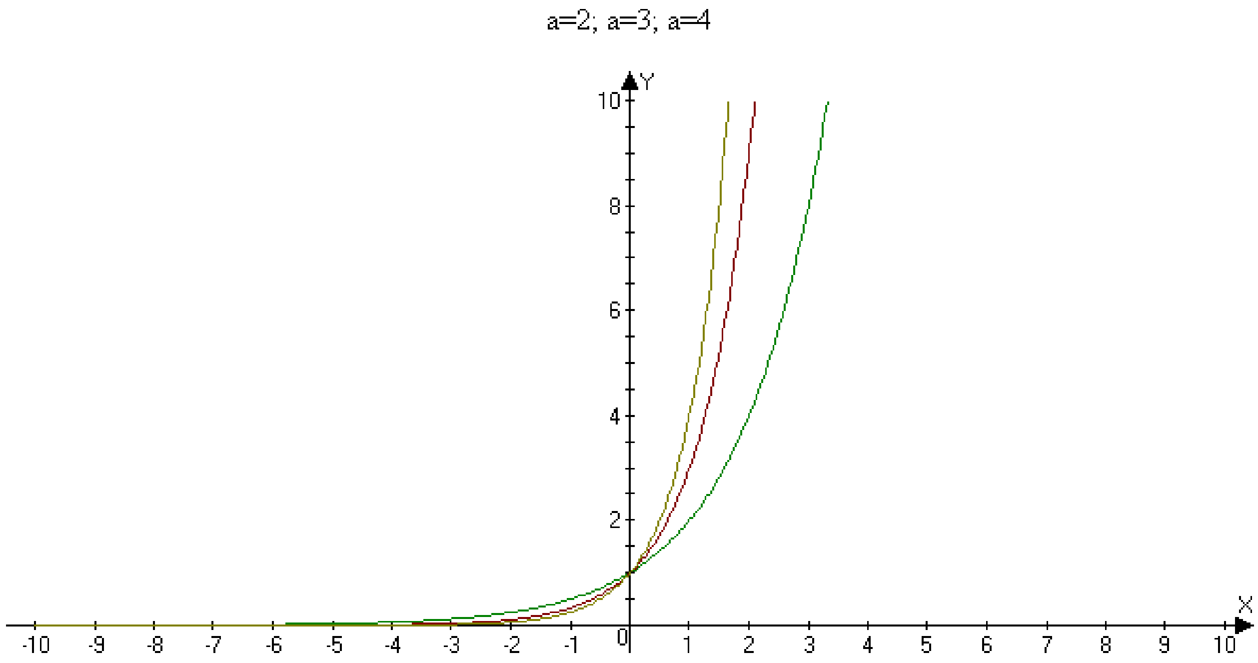


рис. 1

1) монотонно возрастающая

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

3) Если x>0, то $a^x > 1$

Если x<0, то $0 < a^x < 1$

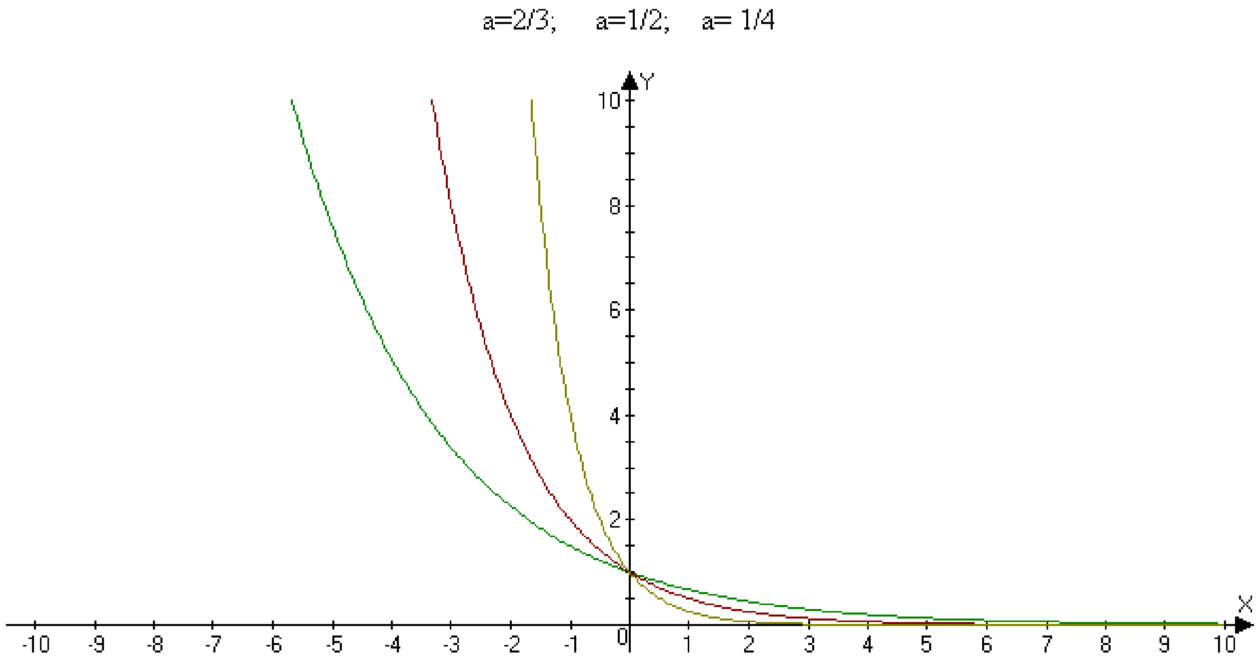


рис. 2

Свойства показательной функции $y = a^x$ при 0<a<1 (рис.2).

1) Монотонно убывающая

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

3) Если x>0, то $a^x < 1$

Если x<0, то $0 < a^x < 1$

4) Аналогично п.4 свойств $y = a^x (a > 1)$

Задания для самостоятельной работы.

Определите множество значений функции:

	ответы		ответы
1) f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$	$\left[\frac{1}{2};2\right]$	11) f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5\cos x}$	$\left[\frac{1}{32};32\right]$
2) f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$	$\left[\frac{1}{3};3\right]$	12) f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3\cos x}$	$\left[\frac{1}{27};27\right]$
3) f(x) = $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sin x}$	$\left[\frac{1}{4};4\right]$	13) f(x) = $(5)^{-2\sin x}$	$\left[\frac{1}{25};25\right]$
4) f(x) = $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\cos x}$	$\left[\frac{1}{5};5\right]$	14) f(x) = $(6)^{-2\cos x}$	$\left[\frac{1}{36};36\right]$
5) f(x) = $\left(\frac{1}{6}\right)^{\sin x}$	$\left[\frac{1}{6};6\right]$	15) f(x) = $\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}$	$\left[\frac{1}{49};49\right]$
6) f(x) = $(7)^{-\sin x}$	$\left[\frac{1}{7};7\right]$	16) f(x) = $(9)^{-2\sin x}$	$\left[\frac{1}{81};81\right]$
7) f(x) = $(8)^{-\cos x}$	$\left[\frac{1}{8};8\right]$	17) $f(x) = (4)^{x^2+2}$	$[16,+\infty]$
8) f(x) = $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2\sin x}$	$\left[\frac{1}{64};64\right]$	18) $f(x) = \left(\frac{1}{3};\right)^{x^2-1}$	$(0;3]$
9) f(x) = $(3)^{-2\cos x}$	$\left[\frac{1}{9};9\right]$	19) $f(x) = \left(\frac{1}{7};\right)^{2-x^2}$	$\left[\frac{1}{49},+\infty\right)$
10) f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\sin x}$	$\left[\frac{1}{16};16\right]$	20) $f(x) = 8^{-x^2+1}$	$(0;8]$

1.2. Методы решения показательных уравнений

1.2.1 Решение уравнений, в которых обе части уравнения можно привести к одному основанию

К данному типу относятся уравнения вида

$$a^{\varphi_1(x)} = a^{\varphi_2(x)}, a>0, a\neq 1 \qquad (1)$$

уравнение (1) равносильно уравнению (2) $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$

Пример 1. Решить уравнение:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x+1} \qquad (3)$$

т.к. $\frac{2}{5}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$, то уравнение (3) можно записать в виде:

$\left(\frac{5}{2}\right)^{3-7x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x+1}$, 3-7x=4x+1, 11x=2 ⇒x=2/11. Ответ {2/11}.

Пример 2. Решить уравнение:

$0{,}125\times 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$, преобразуем левую и правую части уравнения:

$$\frac{1}{8}\times 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4}\times 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

$$2^{-3}\times 2^{2(2x-8)} = \left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$$

$$2^{-3+4x-16} = 2^{2,5x} \quad -3+4x-16 = 2,5x$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{38}{3} \quad Ответ: \left\{\frac{38}{3}\right\}$$

Пример 3.

$$\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x}-4}$$

$$5^{\frac{5\sqrt{x}}{x}} = 5^{\sqrt{x}-4}$$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}-4$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - 4\sqrt{x} - 5 = 0, обозначим \sqrt{x}=y$$

$y^2-4y-5=0 \Rightarrow y_1=5; y_2=-1$(посторонний корень - п.к.)

$\sqrt{x}=5, x=25; Ответ:\{25\}$

1.2.2.Уравнения, в которых левая и правая части содержат показательные функции с разными основаниями

К данному типу относятся уравнения вида

$$a^{\varphi_1(x)} = b^{\varphi_2(x)}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1 \qquad (4)$$

Для решения уравнения (4) необходимо прологарифмировать обе части уравнения, например, по основанию a или b: $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \times \log_a b$ (5)

откуда определяется корень x.

Пример 4. $2^{3x-1} = 13^{1-x}$

Логарифмируя по основанию 2, получим $3x - 1 = (1 - x)\log_2 13$ или $3x + x\log_2 13 = 1 + \log_2 13$

$x(3 + \log_2 13) = 1 + \log_2 13$

$x = \dfrac{1 + \log_2 13}{3 + \log_2 13} = \dfrac{\log_2 26}{\log_2 104}$ Ответ: $\dfrac{\log_2 26}{\log_2 104}$ $\{2; -log_3 18\}$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

	ответы		ответы
1. $4^{x+4} = 0{,}25 \cdot 7^{x+5}$	$\{ -5\}$	5. $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x+2}} = 12$	$\{2; -\log_2 12\}$
2. $5^{x+3} = 0{,}2 \cdot 3^{x+4}$	$\{ -4\}$	6. $3^x \cdot 4^{\frac{x}{x+2}} = 18$	$\{2; -\log_3 18\}$
3. $5^{x-4} = 1{,}6 \cdot 2^{x-6}$	$\{ 3\}$	7. $2^{2+\log_2 x} = 6 - 2^{2-\log_2 x}$	$\{2\}$
4. $5^{x+5} = 0{,}8 \cdot 2^{x+4}$	$\{-6\}$	8. $2^{1+\log_2 x} = 6 + 2^{3-\log_2 x}$	$\{4\}$

1.2.3. Метод решения показательных уравнений путем введения новой переменной

К данному типу относятся уравнения вида $Aa^{\varphi(x)} + Bb^{\varphi(x)} = C$, **(6)**

где A,B и C –const. Если a=1/b, то введением новой переменной $a^{\varphi(x)} = y > 0$ получим вместо уравнения (6) следующее:

$$Ay + B\frac{1}{y} = C, \ (7) \quad \text{или} \quad Ay^2 - Cy + B = 0$$

Пример 5. $2^{1-x} = 15 + 2^{3+x}$

$2 \times 2^{-x} = 15 + 8 \times 2^x$ Положив $y = 2^x > 0$, получим

$$\frac{2}{y} = 15 + 8y \Leftrightarrow 8y^2 + 15y - 2 = 0$$

Решая последнее уравнение, получим $y_1 = -2, y_2 = \dfrac{1}{8}$, и $2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3;$ *Ответ* $:\{-3\}$

<u>Пример 6</u>. Решить $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3-\sqrt{8}}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\right)^x = 6$

Учитывая, что $\sqrt{3-\sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$, получим уравнение

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\right)^{\frac{x}{3}} + \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} = 6$, введем новую переменную

$y = \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} > 0$, тогда получим уравнение: $\dfrac{1}{y} + y = 6$

или $y^2 - 6y + 1 = 0, \Rightarrow y_1 = 3+\sqrt{8}; y_2 = 3-\sqrt{8}$

1)$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} = 3+\sqrt{8} \Rightarrow x_1 = 6;$

2)$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} = 3-\sqrt{8} \Rightarrow x_2 = -6;$ Ответ: {-6;+6}

<u>Пример 7</u>. $9^{x+\frac{1}{x}+1} + 26\times 3^{x+\frac{1}{x}} - 3 = 0$. Решение: ОДЗ: $x \neq 0$.
Введем новую переменную

$3^{x+\frac{1}{x}} = y > 0$, тогда $9y^2 + 26y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -3 < 0$ (п.к.); $y_2 = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow 3^{x+\frac{1}{x}} = 3^{-2} \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0, \Rightarrow x = -1;$ *Ответ* $\{-1\}$

<u>Пример 8</u>. $2\times 2^{2x} + 18\times 2^{-2x} - 11\times 2^x - 33\times 2^{-x} + 26 = 0$

$2(2^{2x} + 9\times 2^{-2x}) - 11(2^x + 3\times 2^{-x}) + 26 = 0$

Обозначим $2^x + 3\times 2^{-x} = y > 0$, тогда $y^2 = 2^{2x} + 9\times 2^{-2x} + 6$

При этом уравнение принимает вид:
$2y^2 - 11y + 14 = 0 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = \dfrac{7}{2}$

1) $2^x + 3\times 2^{-x} = 2,$ делая замену $2^x = z > 0$, получим уравнение $z^2 - 2z + 3 = 0$, которое не имеет решений.

2) $2^x + 3\times 2^{-x} = \dfrac{7}{2}$, делая замену $2^x = z > 0$ получим $z + \dfrac{3}{z} = \dfrac{7}{2}$ или

$$2z^2-7z+6=0\Rightarrow z_1=2;z_2=\frac{3}{2}$$

a) $2^x=2\Rightarrow x_1=1$

b) $2^x=\frac{3}{2}\Rightarrow x_2=\log_2\frac{3}{2}$ Ответ: $\{1;\log_2(3/2)\}$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения: ответы решить уравнения ответы

1) $2^{x+1}=7+2^{2-x}$ $\{2\}$

2) $3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2^{4-\sqrt{x}}=26$ $\{9\}$

3) $2\,2^{3+\sqrt{x}}+4=33\sqrt{2^{\sqrt{x}}}=0$ $\{16\}$

4) $3^{1+\sqrt{x}}+3^{3-\sqrt{x}}=82$ $\{9\}$

5) $16^{\frac{1}{x}}+2=3\cdot 2^{\frac{2}{x}}$ $\{2\}$

6) $2^{1+x^2}+2^{4-x^2}=33$ $\{\pm 2\}$

7) $8^{1+\sqrt{x}}+2\cdot 8^{-\sqrt{x}}=17$ $\{\frac{1}{9}\}$

8) $3\cdot 4^{\sqrt{x}}-25\cdot 2^{\sqrt{x}}+8=0$ $\{9\}$

9) $2\cdot 4^{1+\sin x}+5\cdot 4^{1-\sin x}=44$ $\{\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$

10) $4^{1+\cos x}+2\cdot 4^{1-\cos x}=33$ $\{\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\}$

1.2.4.Однородные уравнения относительно степеней

К данному виду относятся уравнения типа

$$Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0 \qquad (8)$$

так как $b^{2x}\neq 0$, то разделим почленно уравнение (8) на b^{2x}:

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C=0$$

Вводя новую переменную $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}=y>0$, получим уравнение аналогичное (7).

Пример 9. Решить $2^{2x+2}-6^x-2\times 3^{2x+2}=0$

Решение: $4\times 2^{2x}-2^x3^x-18\times 3^{2x}=0$, разделим на $3^{2x}\neq 0$

$$4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-18=0.$$ Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=y>0$, тогда получим

$$4y^2-y-18=0, y_1=-2(п.к.), y_2=\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\Rightarrow x=-2$$ Ответ:{-2}

<u>Пример 10</u>. Решить $3\times 2^{2x-2}+3^{2x+1}=3\times 2^{2x+1}-2^{-1}\times 3^{2x}$

$$3^{2x}\left(3+\frac{1}{2}\right)=3\times 2^{2x+1}\left(1-\frac{1}{8}\right)$$

Разделим обе части последнего уравнения на 2^{2x}, тогда получаем

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$ Ответ: {1/2}

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

	Ответы		ответы
1) $5\cdot 3^{2x+1}-16\cdot 15^x-3\cdot 5^{2x+1}=0$	{-1}	6) $3\cdot 2^{2x+1}-5\cdot 6^x-2\cdot 3^{2x+1}=0$	{-1}
2) $2^{2x+3}-6^{x+1}-3^{2x+3}=0$	{-2}	7)$125\cdot 9^x+30\cdot 15^x-27\cdot 25^x=0$	{2}
3) $5\cdot 2^{2x+1}-21\cdot 10^x-2\cdot 5^{2x+1}=0$	{-1}	8) $3\cdot 2^{2x+2}-19\cdot 6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0$	{-2}
4) $3^{2x+3}-12^{x+1}-4^{2x+3}=0$	{-2}	9) $64\cdot 9^x+12^{x+1}-27\cdot 16^x=0$	{2}
5) $9\cdot 2^{2x+1}+19\cdot 6^x-4\cdot 3^{2x+1}=0$	{2}	10) $4\cdot 9^x+37\cdot 12^{x-1}-3\cdot 16^x=0$	{2}

1.2.5.Показательные уравнения, содержащие неизвестную в основании и в показателе степени

Такие уравнения содержат выражения типа $\varphi_1(x)^{\varphi_2(x)}$.

При решении уравнений считается, что $\varphi_1(x)>0$. Однако рассматривается также решение, если

$$1)\begin{cases}\varphi_1(x)=0\\ \varphi_2(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow \varphi_1(x)^{\varphi_2(x)}=0$$ и

2) если при $\varphi_1(x)<0$ получается верное числовое равенство путем подстановки в исходное уравнение возможных корней.

При решении указанных уравнений используется основное логарифмическое тождество либо логарифмирование обеих частей уравнения.

<u>Пример 11.</u> Решить $x^{2x^2-3x+1}=x^3$

Рассмотрим x>0. Преобразуем уравнение, используя основное логарифмическое тождество:

$$2^{\left(2x^2-3x+1\right)\log_2 x}=2^{3\log_2 x}$$

$$\left(2x^2-3x+1\right)\log_2 x=3\log_2 x$$

$$\left(2x^2-3x-2\right)\log_2 x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\ 2x^2-3x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. ;\ x=-\frac{1}{2}\,(\text{п.к.})$$

Рассмотрим, когда основание x=0. Обе части уравнения равны нулю.

$\Rightarrow$x=0 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\{0;1;2\}$

<u>Пример 12</u>. $\left(1+x^2\right)^{1+\sqrt{x}}=\left(1+x^2\right)^{2+\sqrt{x}}$ ОДЗ: $x\geq 0$

Преобразуем уравнение:

$$10^{\left(1+\sqrt{x}\right)\lg\left(1+x^2\right)}=10^{\left(2+\sqrt{x}\right)\lg\left(1+x^2\right)}$$

$$\left(1+\sqrt{x}\right)\lg\left(1+x^2\right)=\left(2+\sqrt{x}\right)\lg\left(1+x^2\right)$$

$$\left(1+\cancel{\sqrt{x}}-2-\cancel{\sqrt{x}}\right)\lg\left(1+x^2\right)=0$$

$$\lg\left(1+x^2\right)=0\Rightarrow x=0; \qquad \textit{Ответ}:\{0\}$$

<u>Пример 13</u>**:** $\left|x+3\right|^{x^2-x-2}=1$

$$10^{\left(x^2-x-2\right)\lg\left|x+3\right|}=10^0$$

$$\left(x^2-x-2\right)\lg\left|x+3\right|=0$$

$$x^2-x-2=0\Rightarrow x_1=-1;x_2=2;$$

$$\lg\left|x+3\right|=0\Rightarrow\left|x+3\right|=1\Rightarrow x_3=-2;x_4=-4; \qquad \textit{Ответ}:\{-1;\pm 2;-4\}$$

<u>Пример 14</u>**:** $x^{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$ Решение**:** Прологарифмируем по основанию 2, в результате получим $\sqrt[3]{x^2}\log_2 x=x\log_2\sqrt{x}$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{x}{2}\right)\log_2 x=0$$

$$1)\sqrt[3]{x^2}-\frac{x}{2}=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{x^3}{8}$$

$$\Rightarrow x^2\left(x-8\right)=0\Rightarrow x_1=0(п.к.);x_2=8;$$

$2)\log_2 x=0\Rightarrow x=1;$ Ответ**: {1;8}**

<u>Пример 15</u>. Решить $\left(x^2+x+1\right)^{x-5\sqrt{x}+6}=\left(x+3\right)^{x-5\sqrt{x}+6}$ ОДЗ: $x\geq 0$

Логарифмируя обе части уравнения, например, по основанию 2, получим уравнение

$$\left(x-5\sqrt{x}+6\right)\log_2\left(x^2+x+1\right)=\left(x-5\sqrt{x}+6\right)\log_2\left(x+3\right)$$

равносильное исходному на области допустимых значений . Полученное уравнение можно переписать в виде

$\left(x-5\sqrt{x}+6\right)\left(\log_2\left(x^2+x+1\right)-\log_2\left(x+3\right)\right)=0$ Ответ: {4;9;√2}

§1.3. Методы решения показательных неравенств

Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции, основано на свойствах этих функций, а также на методах решения алгебраических неравенств и показательных и логарифмических уравнений. При решении неравенств целесообразно начинать решение с определения ОДЗ и использовать правила равносильного перехода при преобразовании неравенств, так как в отличие от решения уравнений использовать проверку решения неравенства практически невозможно.

1.3.1. Решение неравенств путем приведения обеих частей неравенства к одному основанию

При этом используется свойство монотонности показательной функции:

$$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)>\varphi(x),\ \text{если}\ a>1$$

$$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)<\varphi(x),\ \text{если}\ 0<a<1$$

<u>Пример 16</u>. $(1,25)^{1-x}<(0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$ ОДЗ: $x\geq 0$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x}<\left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})}\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}<\left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}$$

$$x-1>4(1+\sqrt{x})\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}-5>0$$

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+1\right)>0\\ \sqrt{x}\ge 0\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}\in\left(5,+\infty\right)\Rightarrow x\in\left(25,+\infty\right)$$ Ответ:(25,∝).

1.3.2. Неравенства, содержашие показательные функции при различных основаниях

Такие неравенства приводятся к виду:

$a^{f(x)} < b^{\varphi(x)}, a>0, a\ne 1; b>0, b\ne 1.$

Если обе части неравенства положительны, то используется логарифмирование неравенства по какому-либо основанию, либо применяется основное логарифмическое тождество.

Пример 17. $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$ Решение: ОДЗ: $x\ne 0$

Прологарифмируем по основанию 2: $x<\dfrac{1}{x}\log_2 3$, где $\log_2 3>0$

Отсюда $\dfrac{x^2-\log_2 3}{x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\sqrt{\log_2 3}\right)\left(x+\sqrt{\log_2 3}\right)}{x}<0$

Решив неравенство методом интервалов, получим $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\log_2 3}\right)\bigcup\left(0,\sqrt{\log_2 3}\right)$ Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{\log_2 3}\right)\bigcup\left(0;\sqrt{\log_2 3}\right)$

1.3.3. Метод введения новой переменной

При решении неравенств в этом случае используется замена показательной функции $a^{\varphi(x)}$ на другую переменную.

Пример 18. $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{2}{2^x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0$ Решение: вводим новую переменную $y=2^x>0$. Решим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{2-y^2+y}{y(y-1)}\le 0\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left(y-2\right)\left(y+1\right)}{y\left(y-1\right)}\ge 0\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow y\in(0,1)\bigcup\left[2,+\infty\right)$$

Переходя к переменной x с учетом того, что y возрастающая функция, получим $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ Ответ: $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

Пример 19. $\left(tg\frac{\pi}{8}\right)^{x} - \left(tg\frac{\pi}{8}\right)^{-x} < 3$

Вводим новую переменную $y = \left(tg\frac{\pi}{8}\right)^{x} > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{y} < 3 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2 - 3y - 1}{y} < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left(y - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(y - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)}{y} < 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad y \in \left(0; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$$

При переходе к переменной x следует учесть, что основание показательной функции $tg\frac{\pi}{8} < 1$.

Следовательно, $y = \left(tg\frac{\pi}{8}\right)^{x}$ - монотонно убывающая функция, поэтому $x \in \left(\log_{tg\frac{\pi}{8}}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right), +\infty\right)$. Ответ: $\left(\log_{tg\frac{\pi}{8}}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right), +\infty\right)$

Пример 20. $16^x - 2 \times 12^x \le 3^{2x+1}$

$4^{2x} - 2 \times 3^x 4^x - 3 \times 3^{2x} \le 0$

Разделим обе части неравенства на $3^{2x} \ne 0$: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^{x} - 3 \le 0$

Введем новую переменную $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x} > 0$ и перейдем к равносильной системе неравенств: $\begin{cases} y^2 - 2y - 3 \le 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)(y-3) \le 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (0;3]$

Или $0 < \left(\frac{4}{3}\right)^{x} \le 3 \Rightarrow -\infty < x \le \log_{\frac{4}{3}} 3$ Ответ: $(-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 3]$

1.3.4. Неравенства, содержащие неизвестную в основании и в показателе степени

К таким неравенствам относятся неравенства типа $f(x)^{\varphi(x)} > 0$.

Такие неравенства решаются либо логарифмированием обеих частей неравенства по какому-либо основанию, либо преобразованием с использованием основного логарифмического тождества.

<u>Пример 21</u>. $\left(2-x\right)^{\frac{3x-5}{3-x}} \le 1$

Решение:

если $2-x>0,(x<2)$, то используя основное логарифмическое тождество, преобразуем левую часть неравенства к виду::

$$2^{\frac{3x-5}{3-x}\log_2(2-x)} \le 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-5}{3-x}\log_2(2-x)} \le 2^0,$$

которое равносильно системе неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3x-5}{3-x}\log_2(2-x) \le 0 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3x-5}{3-x}<0 \\ \log_2\left(2-x\right)>0 \\ x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3x-5}{3-x}>0 \\ \log_2\left(2-x\right)<0 \\ x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ \dfrac{3x-5}{3-x}=0 \end{cases} \\ \log_2\left(2-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;1\right) \\ x\in\left(\dfrac{5}{3};2\right) \\ x=\dfrac{5}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Объединяя полученные решения, получим $x\in\left(-\infty,1\right]\cup\left[\dfrac{5}{3};2\right)$

Если $x=2$, то исходное неравенство имеет вид: $0^1 \le 1$. Это верное числовое неравенство, следовательно, $x=2$ входит в множество решений данного неравенства. Ответ: $\left(-\infty,1\right]\cup\left[\dfrac{5}{3};2\right]$.

Глава II. Логарифмическая функция

§2.1. Свойства, графики. Решение задач, использующих свойства логарифмической функции

<u>Определение</u>. Логарифмом числа b , $b>0$, по основанию a, $a>0$, $a\neq 1$, называют такое число c, что $a^c=b$, записывается в виде $c=\log_a b$.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b \qquad (1)$$

Примеры: $\log_3 9 =2$, $\log_5 5^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\log_3(1/27)=-3$

Так как из основного логарифмического тождества следует, что для любого х верно равенство

$$\log_a a^x=x, \qquad (2)$$

то логарифмом может быть любое действительное число.

Формула (2) следует из свойства обратной функции: для любого x , принадлежащего области определения функции $f(x)$ справедливо соотношение $g(f(x))=x$, где $g(x)$ - обратная к $f(x)$ функция; точно так же для любого x, принадлежащего области определения обратной функции $g(x)$, справедливо соотношение $f(g(x))=x$. Если рассмотреть уравнение вида $a^x=b$, где a,b известные числа, x - искомая величина, то показательная функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, является монотонной и принимает все возможные значения на $(0,\infty)$. Следовательно, при условии $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ уравнение $a^x=b$ имеет ровно один корень, который называется логарифмом числа b по основанию а и обозначается $\log_a b$.

Для любого допустимого основания а непосредственно из определения логарифма следует, что $\log_a 1=0$ и $\log_a a=1$.

<u>Теорема 1</u>. (логарифм произведения). Пусть существуют числа $\log_a b$ и $\log_a c$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq 1$. Тогда существует число $\log_a bc$ и верно равенство

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \qquad (3)$$

Доказательство.

$\log_a bc$ существует, так как $a>0$, $a\neq 1$, а $bc>0$ следует из условий теоремы. Из определения логарифма и свойства показательной функции следует, что

$$a^{\log_a b+\log_a c} = a^{\log_a b}a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a bc}$$

так как из равенства $a^x=a^y$ следует $x=y$, получается (3).

Замечание. Если формулировать свойство (3) в виде равенства $\log_a bc=\log_a b + \log_a c$, то следует обязательно требовать существование $\log_a b$ и $\log_a c$, кроме существования $\log_a bc$. (Например, $\log_2((-8)(-6))$существует, а логарифмы сомножителей нет.

<u>Теорема 2</u>.(логарифм степени.) Пусть существует число $\log_a b$, то есть $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$.

Тогда для любого числа c существует число $\log_a b^c$ и справедливо равенство $c\times\log_a b = \log_a b^c$ (4)

Доказательство:

Так как число $b>0$ в любой степени больше нуля , то $log_a b^c$ существует. Тогда

$$a^{c log_a b} = (a^{log_a b})^c = b^c = a^{log_a b^c} \qquad \text{ч.т.д.}$$

Теорема 3.(логарифм частного). Пусть существуют числа $log_a b$ и $log_a c$, т.е. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$. Тогда существует число $\log_a(b/c)$ и верно равенство

$$log_a b - log_a c = log_a(b/c) \tag{5}$$

Доказательство:

Используя теоремы (1) и (2), получаем

$log_a b - log_a c = log_a b + log_a(c^{-1}) = log_a(bc^{-1}) = log_a(b/c)$ ч.т.д.

Теорема 4. (формула перехода к новому основанию). Пусть существует $log_a b$, т.е. $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$. Тогда для любого числа с такого, что $c > 0$, $c \neq 1$, существуют числа $log_c b$ и $log_c a$ и верно равенство

$$log_a b = log_c b / log_c a \tag{6}$$

Доказательство:

Существование $log_c b$ и $log_c a$ следует из того , что $a >0$, $b>0$, $c>0$ и $c\neq 1$; $log_c a \neq 0$, т.к. $a \neq 1$.

$$c^{log_c a \times log_a b} = (c^{log_c a})^{log_a b} = a^{log_a b} = b = c^{log_c b}$$

Следовательно, $log_c a \times log_a b = log_c b$ ч.т.д.

Из доказанных теорем (2,4) следуют следующие формулы:

$$\log_{a^\alpha} x = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\log_a x \tag{7}$$

$$\log_a b \times \log_b a = 1 \tag{8}$$

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x \tag{9}$$

Таблица основных формул для логарифмов.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_{a^\alpha} x = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\log_a x$$

$$\log_a b \times \log_b a = 1$$

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x$$

Упражнения:

1. Найти числовые значения выражений:

пример: $9^{\log_{\sqrt{3}}2}=3^{2\log_{\sqrt{3}}2}=3^{\log_{\sqrt{3}}4}=3^{\frac{\log_3 4}{\log_3\sqrt{3}}}=3^{2\log_3 4}=3^{\log_3 16}=16.$

$4^{\log_3 3}=?, 27^{\log_3 2}=?, 4^{\log_8 27}=?$

2.Найти значения следующих выражений ($a>0$, $a\neq 1$):

$$a^{\log_a 2}=?, a^{\log_{\sqrt{a}}4}=?, \left(2a\right)^{\log_{\sqrt{a}}1}=?, a^{4\log_{a^2}5}=?, \log_{a^3}a=?, \log_{\sqrt{a}}a^{\frac{1}{3}}=?$$

3.Выяснить, какие из указанных ниже логарифмов положительны, а какие отрицательны:

$$\log_2 5;\ \log_{0,2}0,8;\ \log_5 2;\ \log_{\frac{1}{5}}\sqrt{7}$$

4.Выяснить, какое из указанных чисел больше другого:

$$\log_3 4\vee\log_4\frac{1}{3};\ \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{5}\right)\vee\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{4}\right);\ \log_{0,1}\sqrt{2}\vee\log_{0,2}0,34;$$

$$2^{\log_5 3}\vee 3^{\log_5\left(\frac{1}{2}\right)};$$

5.Найти $\log_{49}32$, если $\log_2 14=a$; Найти $\log_{15}49=?$,если $\log_7 9=a$ и $\log_7 45=b$..

6. Доказать следующие тождества:

$$\log_{ax}\left(bx\right)=\left(\log_a b+\log_a x\right)/\left(1+\log_a x\right)$$

$$\frac{\log_a x}{\log_b x}=\log_a b;\qquad \frac{\log_a x_1}{\log_a x_2}=\log_a x_1x_2$$

Определение. Логарифмической функцией переменной *x* по основанию *a* называют отображение, которое числу *x* ставит в соответствие число равное $log_a x$. Из определения логарифма следует, что число *a* должно быть положительным и не равным единице, а $x>0$.

Свойства:

1. Область определения функции $D(\log_a x)=(0,\infty)$.
2. Область значений функции $E(\log_a x)=(-\infty,+\infty)$, уравнение $log_a x=y$ при любом действительном y имеет всегда один корень $x=a^y$.
3. Периодичность. Логарифмическая функция не является периодической, т.к. она определена только для положительных чисел *x*.
4. Четность или нечетность. Логарифмическая функция не является четной или нечетной, т.к. она определена только для положительных чисел *x*.
5. Точки пересечения графика с осями координат. Так как уравнение $log_a x=0$ имеет единственный корень $x=1$, то у логарифмической функции есть

одна точка пересечения с осью абсцисс (1;0). Точка нуль не принадлежит области определения, поэтому точек пересечения с осью ординат нет.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Если $a>1$, то значения логарифмической функции отрицательны на промежутке (0,1) и положительны на $(1,\infty)$. Если $0 < a < 1$, то значения логарифмической функции положительны на промежутке (0,1) и отрицательны на промежутке $(1,\infty)$.

Доказательство:

Пусть $a > 1$ и $x > 1$. Докажем, что в этом случае значения логарифмической функции положительны. Предположим противное, т.е. существует такое $x > 1$, что $log_a x = y \le 0$. Тогда в силу возрастания показательной функции с основанием $a > 1$ получаем, что $a^y \le a^0 = 1$. С другой стороны по основному логарифмическому тождеству

$$a^{log_a x} = x > 1,$$

получили противоречие, т.е. предположение неверно.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Логарифмическая функция не имеет наибольшего и наименьшего значений, так как областью значений этой функции являются все действительные числа и эта функция монотонна.

8. Интервалы возрастания и убывания. Если $0<a<1$, то функция $y=log_a x$ убывает на всей своей области определения, и если $a>1$, возрастает.

Доказательство:

Пусть $x_1>x_2>0$ и $a>1$. Пусть $y_1=log_a x_1$, $y_2=log_a x_2$. Из определения логарифмической функции

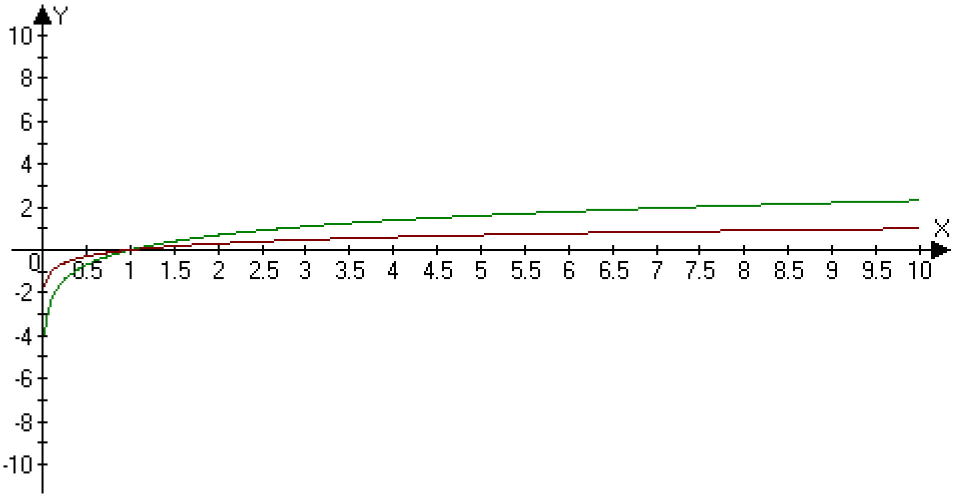
$$a^{y_1} = x_1 > x_2 = a^{y_2}$$

Из свойства возрастания показательной функции с основанием $a>1$ получаем, что $y_1 > y_2$ ч.т.д.

Аналогично при $0<a<1$ логарифмическая функция убывает.

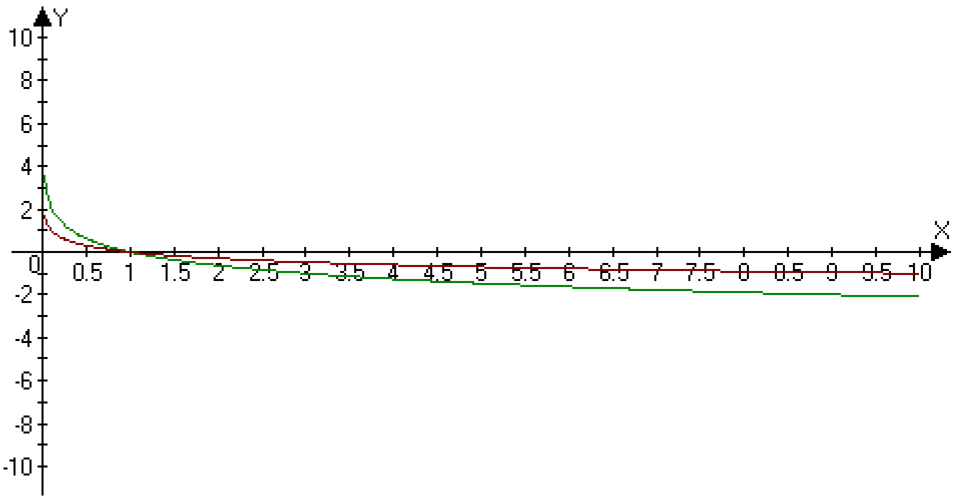
9. Асимптоты. Единственной асимптотой графика логарифмической функции является ось ординат.

a=10, a=e



$$y = \log_a x, a > 1$$

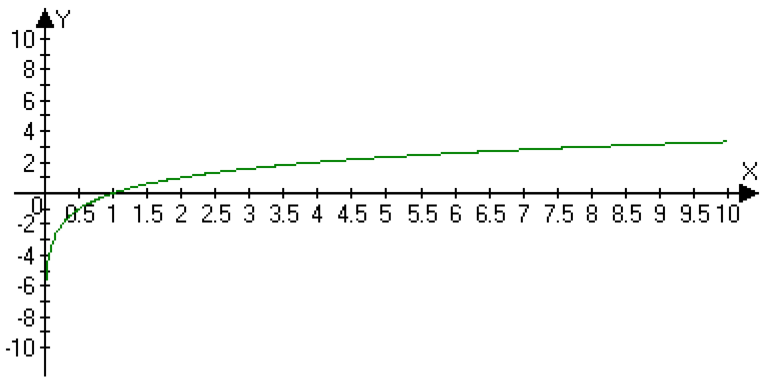
a=1/3, a=1/10



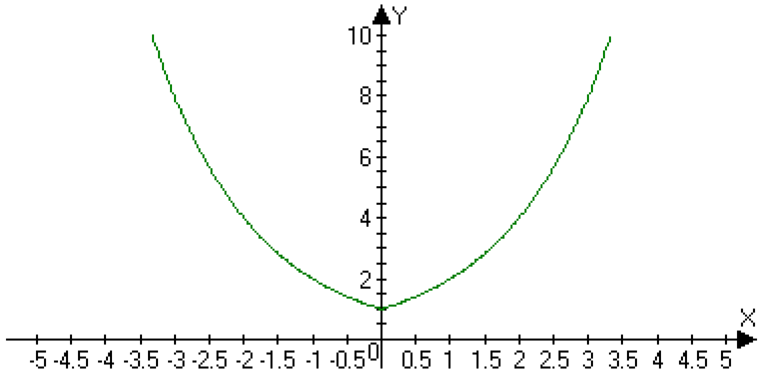
$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$

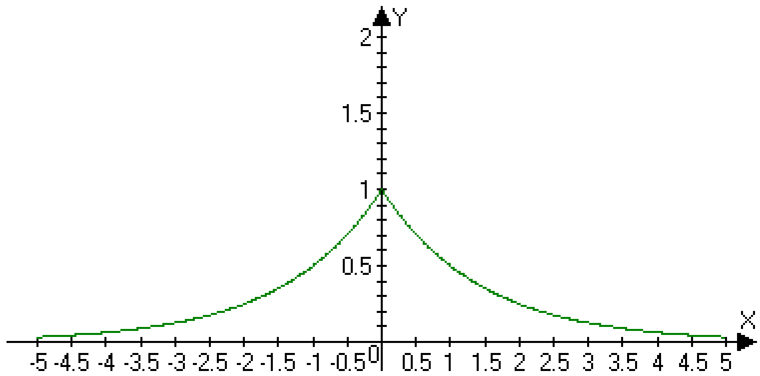
Упражнения: построить графики следующих функций.

1)y= $\log_2 x$



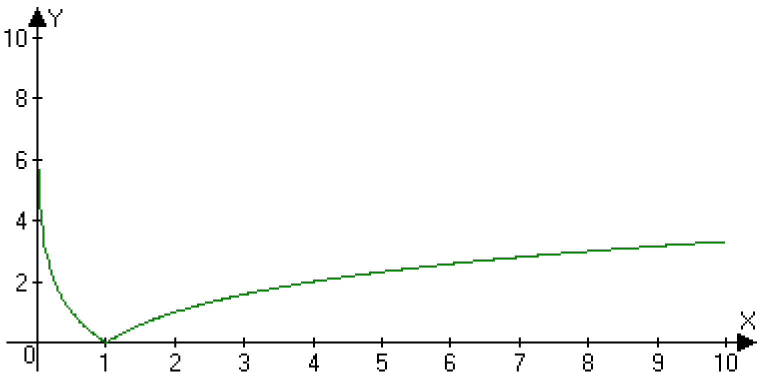
2) $y=2^{|x|}$



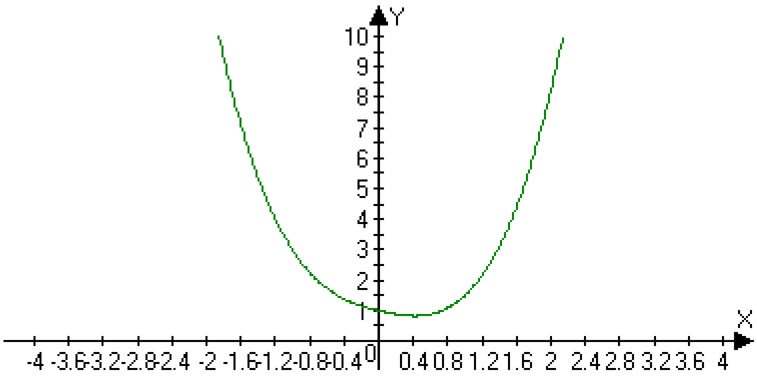


3) $y=2^{-|x|}$

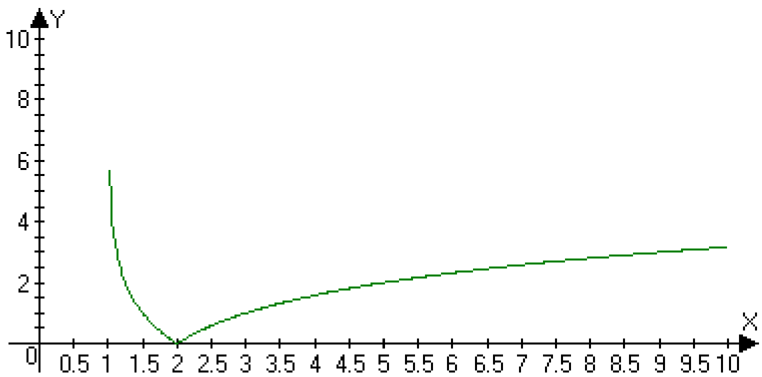
4) $y=|\log_2 x|$



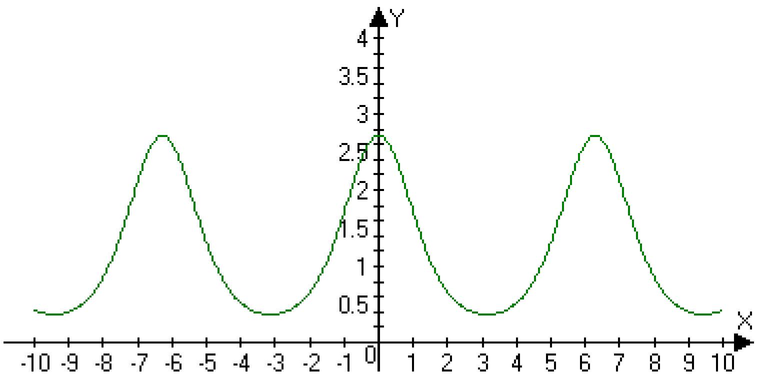
5) $y=\left|x^3\right|+2^{-x}$



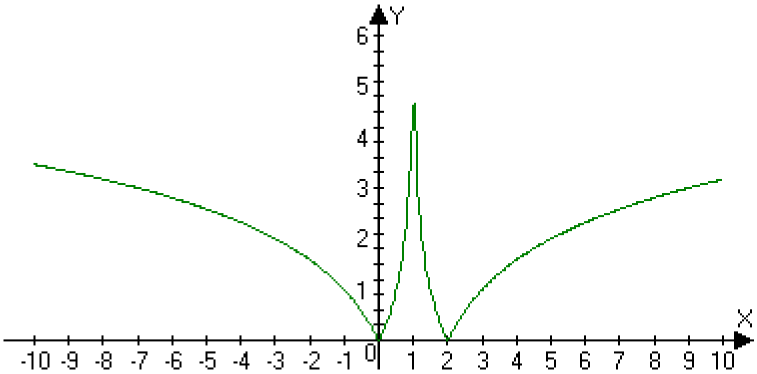
6)$y=| \log_2(x-1)$



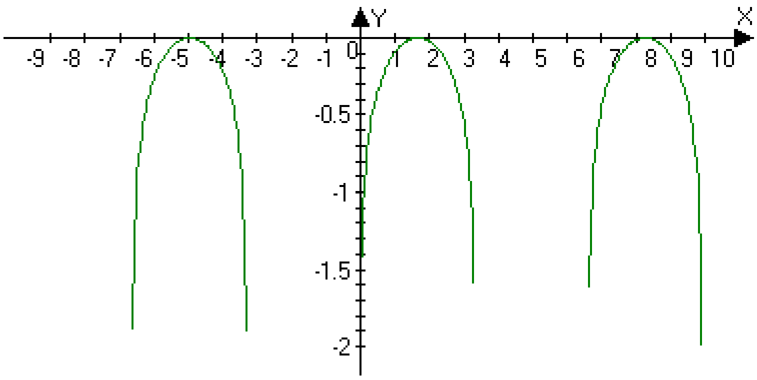
7) $y=\exp(\cos x)$



8) $y=|\log_2|x-1||$



9) $y=\lg(\sin x)$



Задания для самостоятельной работы

2. Построить графики функций:

1) $y=3^{\log_3 x}$; 2) $y=3^{\log_3 x}$

3) $y=2^{\log_3|x|}$ 4) $y=3^{\log_3 \sin x}$

5) $y=3^{-\log_3 x}$ 6) $y=3^{-\log_3|x|}$

7) $y=5^{\frac{1}{2}\log_3 x^2}$ **8)** $y=\log_2|x-2|$

9) $y=2^{x-1}+3$ 10) $y=5^{\log_5(2-x)-\log_5 x}$

Сравнение логарифмов

Пример 1. Сравнить $\log_2 3$ и $\log_3 5$

первый способ: умножение обеих частей на число $k\geq 2$

k=2 $2\log_2 3 \vee 2\log_3 5$

$$\log_2 3^2 \vee \log_3 5^2$$

$3<\log_2 9<4$ $\qquad$ $2<\log_3 25<3$

поэтому $\log_2 3>\log_3 5$

второй способ: деление отрезка пополам

$1<\log_2 3<2$ $\qquad$ $1<\log_3 5<2$

сравним $\log_2 3$ и $\log_3 5$ с числом $\frac{3}{2}$ - серединой отрезка (1;2)

$\log_2 3 \vee \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\log_3 5 \vee \frac{3}{2}$

$\log_2 3 \vee \log_2 2^{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $\log_3 5 \vee \log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$3 \vee 2^{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $5 \vee 3^{\frac{3}{2}}$

возведем обе части сравнения в квадрат

$9>8$ $\qquad$ $25<27$

поэтому $\log_2 3>\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\log_3 5<\frac{3}{2}$. $\qquad$ Ответ $\log_3 5<\log_2 3$.

третий способ: используем неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом чисел $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

рассмотрим отношение $\sqrt{\frac{\log_3 5}{\log_2 3}} = \sqrt{\log_3 5 \log_3 2} \le \frac{\log_3 5 + \log_3 2}{2} = \frac{\log_3 10}{2} \langle 1$

отношение меньше 1, когда числитель меньше знаменателя, поэтому $\log_3 5<\log_2 3$.

<u>Пример 2.</u> Сравним $\log_3 4$ и $\log_4 5$

Оба логарифма находятся в промежутке (1;2)

Будем умножать на числа $k \ge 2$

K=2 $\qquad$ $2\log_3 4=\log_3 16$; $\qquad$ $2\log_4 5=\log_4 25$

оба логарифма находятся в промежутке (2;3)

k=3 $\qquad$ $3\log_3 4=\log_3 64$; $\qquad$ $3\log_4 5=\log_4 125$

оба логарифма находятся в промежутке (3;4)

k=4 $\qquad$ $4\log_3 4=\log_3 256$; $\qquad$ $4\log_4 5=\log_4 625$

оба логарифма находятся в промежутке (4;5)

k=5 $\qquad$ $5\log_3 4=\log_3 1024$; $\qquad$ $5\log_4 5=\log_4 3125$

$6<\log_3 1024< 7$ $\qquad$ $5<\log_4 3125<6$

поэтому $\log_4 5<\log_3 4$.

Другим способом: $\sqrt{\frac{\log_4 5}{\log_3 4}} = \sqrt{\log_4 5 \log_4 3} \le \frac{\log_4 5 + \log_4 3}{2} = \frac{\log_4 15}{2} < 1$

<u>Пример 3</u>. Сравнить $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$

Оба числа находятся в промежутке (1;2)

Определим, как они расположены по отношению к середине отрезка –числу $\frac{3}{2}$

$\log_2 3 \vee \frac{3}{2} = \log_2 \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{7} \vee \frac{3}{2}$

$3 \vee 2^{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $7 > \frac{27}{8}$

$9 > 8$

$\log_2 3 > \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{7} > \frac{3}{2}$

оба числа больше $\frac{3}{2}$ и меньше 2.

Сравним их с серединой $(\frac{3}{2};2)$ – числом $\frac{7}{4}$

$\log_3 2 \vee \frac{7}{4} = \log_2 2^{\frac{7}{4}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{7} \vee \frac{7}{4}$

$3 \vee 2^{\frac{7}{4}}$ $\qquad$ $7 \vee \frac{7^3}{4^3}$

$81 \vee 2^7$ $\qquad$ $1 > \frac{49}{64}$

$81 < 128$

$\log_3 2 < \frac{7}{4}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{7} > \frac{7}{4}$

Пример 4. Сравнить $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$

Оба числа находятся в промежутке (1;2)

Сравним их с числом $\frac{3}{2}$

$\log_3 4 \vee \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{2} \vee \frac{3}{2}$

$4 \vee 3^{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $2 < \frac{81}{16}$

$16 < 27$

оба числа больше 1 и меньше $\frac{3}{2}$

Сравним их с серединой $(1;\frac{3}{2})$ – числом $\frac{5}{4}$

$\log_3 4 \vee \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{2} \vee \frac{5}{4}$

$4 \vee 3^{\frac{5}{4}}$ $\qquad$ $2 \vee \frac{5^4}{4^4}$

$256 > 243$ $\qquad$ $2 < \frac{625}{256}$ $\qquad$ Ответ $\sqrt[4]{2} < \frac{5}{4} < \log_3 4$

Задания для самостоятельной работы

Сравнить $\log_7 8$ и $\log_8 9$; $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$; $\log_2 5$ и $2\frac{2}{3}$; $\log_2 5 + \log_5 3$ и 4; $\log_2 3 + \log_3 2$ и2.

1. Доказать: $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2$

2. Вычислить без таблиц:

   a) $\lg(tg40^0)\cdot \lg(tg40^0)\cdot \lg(tg42^0)\cdot \ldots\ldots \lg(tg50^0)$

   b) $\log_2 3\cdot \log_3 4\cdot \ldots\ldots\log_9 10$

   c) $\lg(tg3^0)\cdot \lg(tg6^0)\cdot \lg(tg9^0)\cdot \ldots\ldots \lg(tg80^0)\cdot$

3. Найти x, если $\lg x = 5\lg m - \frac{1}{2}\lg(m+n) - \frac{4}{5}\lg\left(tg\frac{3\alpha}{2}\right)$

4. Найти $\lg x$, если $x = \sqrt{\frac{5a^3(c+d)^5\cos^2\alpha}{\sqrt[3]{3b\sin\frac{\alpha}{2}}}}$

5. Сколько корней имеет уравнение

   $tgx = \lg x$

6. При каких x имеет смысл выражение $\sqrt{\log_{0,1}\sin x}$

7. Доказать тождество $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$

8. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} 8$, если $\log_{12} 3 = a$

9. Вычислить $\log_3 200$, если $\log_3 5 = a; \log_2 3 = b$

10. Вычислить

   1) $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a, \lg 3 = b$

   2) $\lg\sqrt[3]{25}$,если $\lg 64 = b$

11. Вычислить a) $2^{2+\log_{\frac{1}{2}} 7}$ b) $\log_{\sqrt{2}}\left(4\sqrt[3]{2}\cdot 3^{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[5]{8}}\right)$

12. Вычислить

   1) $\log_{\sqrt{3}-1}(6\sqrt{3}-10)$

   2) $\log_{\sqrt{3}-1}(4-2\sqrt{3})$

   3) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$

   4) $\log_{2\sqrt[3]{4}}(\sqrt{0,5})$

   5) $\left((1,5)^{\frac{2}{2\log_5 3 - \log_5 4}} + 11\cdot 8^{\log_{27} 3}\right)^{\frac{1}{3}}$

   6) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$

   7) $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{49}\sqrt[5]{7}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{49}}\right)$

   8) $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$

13. Сравнить a и b ; $a = \log_{0,3} 0,09; b = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{11}$

14. Сравнить:

   1) $7\sqrt[3]{7}$ и $2^{(1,25\log_8 49 - 0,5\cdot\log_{0,25} 7)}$

   2) $\log_3 4$ и $\log_4 5$

3) $2^{\log_7 3}+\sqrt[5]{6}$ и $3^{\log_7 2}+6^{\frac{1}{3}\log_6 3}$

15. Найти значение а, при котором три числа $\lg a, \lg(a-99), -1-2\lg a$ составляют арифметическую прогрессию.
16. Найти значение а, при котором три числа $\log_3(a+2), \log_3\sqrt{13-14a}, \log_3(28-a^2)$ составляют арифметическую прогрессию.
17. Найти значение а, при котором три числа $2^a; 2^a-6; 4a-63{,}5$ составляют геометрическую прогрессию.
18. Найти значение а, при котором три числа $9^{a-2}; 3^a-2; 3^a+6$ составляют геометрическую прогрессию.
19. Найти значение а, при котором три числа $\log_2(5\cdot 2^a+1), \log_4(2^{1-a}+1), 1$ составляют арифметическую прогрессию.
20. Доказать, что числа $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ составляют арифметическую прогрессию.
21. Каждая из двух троек чисел $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ и $\lg a-\lg 2b$, $\lg 2b-\lg 3c$, $\lg 3c-\lg a$ является арифметической прогрессией. Могут ли числа a,b,c быть сторонами треугольника?

§ 2.2.Решение уравнений, содержащих логарифмическую функцию

2.2.1.Логарифмические уравнения, решаемые, исходя из определения логарифма

Упражнения на простые логарифмические уравнения:

Пример 1. $\log_{9^{\left(\frac{1}{3}\right)}} x = 1{,}5$ Ответ $\{3\}$

Пример2. $\log_3(x-12)=2$ Ответ $\{21\}$

Пример 3. $\log_{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{2}{3}$ Ответ $\{-1/2\}$

Пример 4. $\log_{11}\log_3\log_2\left(\frac{2}{(1-x)}\right)=0$ Ответ $\{3/4\}$

Пример 5. $\log_{\log_{3^{\left(\frac{1}{27}\right)^x}}} 27 = 1$ Ответ $\{3\}$

Пример 6. $\log_{\sin x}\left(\frac{4\sin x-\cos x}{4}\right)=3$

Решение:

$\sin^3 x=(1/4)(4\sin x-\cos x)$, $\sin x>0$, $\sin x \neq 1$, $(4\sin x - \cos x)>0$.

$\sin x(\sin^2 x -1) +(1/4)\cos x=0$, $\cos x(\sin x\times\cos x -1/4)=0$

а) $\cos x=0$ (п.к. ,т.к. $\sin x \neq 1$)

б) $\sin 2x=1/2$ Ответ $x=\pi/12 +\pi k, k\in Z$; $x=5\pi/12 +\pi n, n \in Z$

Пример 7. Найти точки пересечения графика функции $y=\log_2(\sqrt{4-x}+\sqrt{1-3x}-6)$ с осями координат

Решение:

Положим y=0, тогда $y=\log_2(\sqrt{4-x}+\sqrt{1-3x}-6)=0$,

$\sqrt{4-x}+\sqrt{1-3x}-6=1$ и $\sqrt{4-x}+\sqrt{1-3x}=7$.

Решим это уравнение. Пусть $\sqrt{4-x}=t\geq 0$, тогда $4-x=t^2, 4=x-t^2$,

И уравнение примет вид $t+\sqrt{3t^2-11}=7$, откуда $\sqrt{3t^2-11}=7-t$

$3t^2-11=49-14t+t^2$, $2t^2+14t-60=0$, или $t^2+7t-30=0$, откуда

$t_1=3$, $t_2=-10$ ($t_2<0$, что невозможно на множестве R, так как $\sqrt{4-x}\geq 0$, при х $\sqrt{4-x}\geq 0$, при $x\leq 4$).

Значит, $\sqrt{4-x}=3$, откуда $4-x=9$, и x=-5. Таким образом, график пересекает ось абсцисс в точке (-5,0).

2.2.2. Линейные уравнения, решаемые потенцированием

Уравнения типа $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ $a \neq 1>0$, равносильны системе

$$\begin{cases}\varphi(x)>0\\ f(x)>0\\ f(x)=\varphi(x)\end{cases}$$

Пример 8. $\lg x - \lg 11 = \lg 19 - \lg(30-x)$,

Решение: ОДЗ $x\in(0,30)$

$30x -x^2 =209$ Ответ: {19,11}

Пример 9 $(\lg 8 - \lg(x-5))/(\lg(x+7)^{(1/2)}-\lg 2) = -1$

Решение: ОДЗ: $x > 5$;

$\lg(8/(x-5) = -1\times\lg((x+7)^{(1/2)}/2)=\lg(2/(x+7)^{(1/2)})$

$8/(x-5) = 2/(x+7)^{(1/2)}$ Ответ {29}

Пример 10. $\log_5(x-2) +\log_{\sqrt5}(x^3 -2) +\log_{0,2}(x -2) =4$

(Указание: привести к одному основанию) Ответ {3}

Пример 11. $\lg 2x/\lg|4x -15|=2$ Ответ {9/2;25/8}

Пример 12. $x\log_2 3 -1 = - \log_2 18$ Ответ {-2}

2.2.3. Уравнения второй и выше степени относительно логарифма. Замена неизвестного

В данном разделе рассматриваются уравнения, в которых логарифмическая функция заменяется вспомогательной переменной.

Пример 13. $\lg^2 x - \lg x^4 = \lg^2 5 - 4$

Решение: ОДЗ: $x > 0$; пусть $t = \lg x$, тогда

$t^2 - 4t - (\lg^2 5 - 4) = 0$; $t_{1,2} = 2 \pm \lg 5$; Ответ $x=\{20,500\}$

Пример 14. $(17 - \lg x)/(4\times\lg x) = 4\times\lg x$ Ответ $\{10^{(-17/16)}\}\cup\{10\}$

Пример 15. $3 \log_2^2(\sin x) + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$

Ответ: $x=\pi/6 + 2\pi k$, $k\geq 0,1,2,...$ $x=5\pi/6 + 2\pi n$, $n\geq 0,1,2,...$

Пример 16. $\log_x(125x)\log_{25}^2(x) = 1$

Решение: ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$. Перейдя к новому основанию, получаем

$$\frac{\log_5(125x)\log_5^2(x)}{\log_5 x} = 4, \quad \left(\log_5(125) + \log_5 x\right)\log_5^2 x = 4\log_5 x,$$

$\left(3 + \log_5 x\right)\log_5^2 x = 4\log_5 x$, пусть $t = \log_5 x$, тогда

$t(t^2 + 3t - 4) = 0$, $t_1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (п.к.); $t_2 = 1 \Rightarrow x = 5$ Ответ $\{5;1/625\}$

Пример 17. $\log_3\log_4\log_3^2(x - 3) = 0$

Решение: ОДЗ: $x > 3$, тогда $\log_4 \log_3^2\left(x-3\right) = 1$,

$$\log_3^2\left(x-3\right) = 4 \Leftrightarrow \log_3\left(x-3\right) = \pm 2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x-3=9 \\ x-3=\dfrac{1}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=\dfrac{29}{8} \end{array}\right.$$ Ответ $\{12;\ 28/9\}$

Пример 18. $\log_{x+3}(x^2 + x - 6)^2 = 2$

Решение: Согласно ОДЗ

$X > -3$, $x \neq -2$; $2\log_{x+3}\left|x^2 + x - 6\right| = 2$, далее получаем следующее уравнение $\left|x^2 + x - 6\right| = x + 3$, решая которое получаем ответ. Ответ $\{1;3\}$

Пример 19. $\sqrt{4\log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$

Решение:

$\sqrt{4\log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$, положим $\sqrt{1 + \log_2 x} = t > 0$ тогда $1 + \log_2 x = t^2$, тогда имеем $t + \sqrt{2(t^2 - 1 - 1)} = 4$ $\sqrt{2(t^2 - 2)} = 4 - t$ и $2(t^2 - 2) = (4 - t)^2$ или $t^2 + 8t - 20 = 0$, решая которое получаем два корня $t_1 = 2$ и $t_2 = -10$ (посторонний корень), и $\log_2 x = 3$ Ответ $\{8\}$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения ответы

1) $\log_4(10x-14)=1+\log_2(x-8)$ $\left\{\frac{27}{2}\right\}$

2) $\log_4(10x+46)=1+\log_2(x-2)$ $\left\{\frac{15}{2}\right\}$

3) $\log_3 x\cdot\log_8(9x)=\log_2 3$ $\left\{3;\frac{1}{27}\right\}$

4) $\log_2 x\cdot\log_{81}(8x)=\log_3 2$ $\left\{2;\frac{1}{16}\right\}$

5) $\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_{64} x=\log_2 3$ $\left\{27;\frac{1}{9}\right\}$

6) $\log_4(20x-54)=2+\log_2(6-x)$ $\left\{\frac{9}{2}\right\}$

7) $\frac{\lg(5x^2+1)}{\lg(2x+1)}=2$ $\{4\}$

8) $\frac{\lg(5x-19)}{\lg(x-3)}=2$ $\{7\}$

9) $\frac{\lg(3x^2-3x+1)}{\lg x}=2$ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

10) $\frac{\lg(3x^2-16x+21)}{\lg(x-1)}=2$ $\{5\}$

11) $1+\log_{\sqrt{3}} x=\log_3(5x+2)$ $\{2\}$

12) $\log_{\sqrt{2}} x+\log_2 3=2+\log_2(x+1)$ $\{2\}$

2.2.4. Уравнения, содержащие неизвестные в основании логарифмов

В данном разделе рассматриваются несколько различных типов уравнений.

Уравнения вида $\log_{\varphi(x)} f(x)=\log_{\psi(x)} g(x)$ можно решать с помощью перехода к числовому основанию, но учитывать, что

$$\begin{cases} \varphi(x)>0, \varphi(x)\neq 1 \\ \psi(x)>0, \psi(x)\neq 1 \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$$

Пример 20. $\log_x(2x+1)=\log_{2x^3+x^2}(4x^3+4x^2+x)$

Решение: ОДЗ состоит из двух промежутков $0 < x < 1$ и $1 < x < \infty$. Переходя к логарифмам по основанию, например, 2, получим уравнение

$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}=\frac{\log_2(4x^3+4x^2+x)}{\log_2(2x^3+x^2)}$ равносильное исходному на ОДЗ, которое можно записать в виде

$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}=\frac{\log_2 x+2\log_2(2x+1)}{2\log_2 x+\log_2(2x+1)}$, обозначив $\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}=t$, решим уравнение относительно t, получим $t_1=1$ и $t_2=-1$. Ответ $\{1/2\}$.

Уравнения вида $\log_{\varphi(x)} f(x)=\log_{\psi(x)} g(x)$ можно решать с помощью перехода к основанию, содержащему неизвестную. О.Д.З. определяется системой.

$$\begin{cases} \varphi(x)>0, \varphi(x)\neq 1 \\ \psi(x)>0, \psi(x)\neq 1 \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$$

Пример 21. $\log_{\frac{x}{4}} x^2-\log_{8x} x^3=0$

Решение: ОДЗ состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 1/8$. Здесь удобно перейти к логарифмам по основанию x, но сначала проверим является ли $x=1$ корнем исходного уравнения. Проверка показывает, что $x=1$ является корнем исходного уравнения. Перейдя теперь к логарифмам по основанию x, учитывая, что $x>0, x\neq 1, x\neq 4, x\neq 1/8$, получим уравнение

$\frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{x}{4}}-\frac{\log_x x^3}{\log_x 8x}=0$ далее $\frac{2}{1-\log_x 4}-\frac{3}{\log_x 8+1}=0$,

преобразуется к виду $2(1+\log_x 8)-3(1-\log_x 4)=0$ или $12\log_x 2=1$, которое имеет единственный корень $x=2^{12}$. Ответ: $\{1, 2^{12}\}$.

Замечание: уравнения вида $\begin{matrix}\log_{\varphi(x)} h(x)=\log_{\varphi(x)} g(x)\\ \log_{f(x)}\varphi(x)=\log_{g(x)}\varphi(x)\end{matrix}$ можно решать переходя от этих уравнений к их следствиям, т.е. от первого уравнения к h(x)=g(x), а от второго к совокупности f(x)=g(x) и φ(x)=1. Затем проверить какие из найденных корней будут корнями исходного уравнения.

Пример 22. $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1)=\log_{1+x+\sin x}(3x+2)$

Решение: перейдем к следствию $x^2+x-1=3x+2$, найдем корни $x_1=3$ и $x_2=-1$(п.к., т.к. функция в основании логарифмов отрицательна). Проверяем первый корень. Ответ {3}

Пример23.

$\log_{\sin x+\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}(1-\sqrt{x^2-x})=\log_{\sin x+1+\sqrt{\cos x}}(1-\sqrt{x^2-x})$

Решение. Совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos^2 x+\sqrt{\cos x}=\sin x+1+\sqrt{\cos x}\\ 1-\sqrt{x^2-x}=1\end{array}\right.$$

является следствием исходного уравнения. Первое уравнение приводится к виду cosx = ±1, но так как cosx неотрицателен, то $x=2\pi k$. При любом $x_k=2\pi k, k\in Z,$ функция $\sin x+\cos^2 x+\sqrt{\cos x}$ равна 2, т.е. при этих x_k основания логарифмов равны 2. Поэтому решениями будут те $x_k=2\pi k, k\in Z,$ для которых $1-\sqrt{x_k^2-x_k}>0$. Только $x_0=0$ удовлетворяет этому условию, и следовательно, является решением исходного уравнения.

Решения уравнения $1-\sqrt{x^2-x}=1$ есть $x=0, x=1$ Так как $\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, то

$$\sin 1+1+\sqrt{\cos 1}>1, \sin 1+\cos^2 1+\sqrt{\cos 1}>\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}>1$$

Только $x=1$ удовлетворяет исходному уравнению. Следовательно, решениями являются $x=0$ и $x=1$. Ответ {0;1}

Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x)=a$, где a=n, n –натуральное число решаются переходом к следствию $g(x)=[f(x)]^n$.

Пример 24. $\log_{2x-1}(2x^2+4x+1)=2$.

Решение. ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l}x\in(\frac{1}{2};1)\cup(1;+\infty)\\ x\in(-\infty;-1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)\end{array}\right.$

Уравнение $2x^2+4x+1=(2x-1)^2$ является следствием исходного уравнения, корнями которого будут $x_1=4$ и $x_2=0$. Подходит $x=4$. Ответ{4}

Уравнения 25,26,27 решаются логарифмированием обеих частей.

Пример25. $x^{\log_2 x+2} = 256$

Решение: $x \in (0, \infty)$; $\log_2 x = t$; $t^2 + 2t - 8 = 0$;

$t_{1,2} = \{-4;2\} \Rightarrow$ Ответ $\{1/16;4\}$

Пример 26. $x^{\lg x^{(1/4)}} = 10$ Ответ $\{100;1/100\}$

Пример 27. $(x + 7)^{\lg(x+7)} = 10$. Ответ $\{3;-69/10\}$

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнение	ответы
1) $\left(\log_2(5-4x)\right)\cdot\log_x\left(\frac{1}{2}\right)=1$	$\left\{\frac{1}{4}\right\}$
2) $\left(1-\log_3(7-4x)\right)\cdot\log_x 3=1$	$\left\{\frac{3}{4}\right\}$
3) $\left(\log_5 x+\log_x 5+2\right)\cdot\left(\log_5 x-\log_{5x} x\right)=6$	$\left\{25;\frac{1}{125}\right\}$
4) $\left(\log_x 2\right)\cdot\log_2\left(7-\frac{6}{x}\right)=1$	$\{6\}$
5) $\left(1+\log_3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\log_x 3=1$	$\{3\}$
6) $\left(2-\log_2(9-5x)\right)\cdot\log_x 2=1$	$\left\{\frac{4}{5}\right\}$
7) $\left(\log_2(6-5x)\right)\cdot\log_x\left(\frac{1}{2}\right)=1$	$\left\{\frac{1}{5}\right\}$
8) $\left(\log_2 x+\log_x 2+2\right)\left(\log_2 x-\log_{2x} x\right)=12$	$\left\{8;\frac{1}{16}\right\}$
9) $x^{\lg x^{\frac{1}{4}}}=10$	$\left\{100;\frac{1}{100}\right\}$
10) $(x+7)^{\lg(x+7)}=10$	$\left\{3;-\frac{69}{10}\right\}$

§2.3 Решение неравенств

2.3.1. К решению логарифмических неравенств сводятся некоторые задачи на отыскание области определения функции

Пример 28. Найти область определения функции $y=\sqrt{\lg(x^2-7x+13)}$

Решение: $\lg(x^2 - 7x + 13) \geq 0$

$$\begin{cases} x^2-7x+13>0 \\ x^2-7x+13\geq 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$

Пример 29. y = lgx + $(x+1)^{(1/2)}$ Ответ: {x>0}

Пример 30. y = lg sinx Ответ: {(2πk;π+2πk),k∈Z}

Пример 31. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+3}{x-3}}$ Ответ: (6;+1)

Пример 32. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_2|x-2|}$ Ответ: [0;2)U(2;4]

2.3.2. Решение неравенств типа $\log_{f(x)}\varphi(x)\geq k$

Решения неравенств, рассматриваемых в данном разделе, сводятся к решению совокупности следующих систем.

$$\begin{cases}0<f(x)<1\\0<\varphi(x)\leq\left[f(x)\right]^m\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}f(x)>1\\\varphi(x)\geq\left[f(x)\right]^m\end{cases}$$

Пример 33. $\log_{(3-x)}(x-2,5)>0$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x>1\\x-\dfrac{5}{2}>1\end{cases}\Rightarrow\varnothing\\\begin{cases}0<3-x<1\\x-\dfrac{5}{2}<1\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{5}{2};3\right)\end{array}\right.$$

Ответ (5/2;3)

Пример 34. $\log_{(x-1)}(2(x-2)(x-4)/(x+5))\geq1$ Ответ (8-√43;2)U(8+√43;∞)

Пример35. Ответ: $(-3;-2)\cup(-2;\frac{1-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{1+\sqrt{21}}{2};3)\cup(3;\infty)$

Пример 36.

$$\log_{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}}(x^2-10x+22)>0$$

Решение: неравенство равносильно совокупности систем a) и b)

$$a)\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x>1\\x^2-10x+22>1\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};3\right)\cup\left(7;+\infty\right)$$

$$b)\begin{cases}0<\log_{\frac{1}{2}}x<1\\0<x^2-10x+22<1\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};3\right)\cup\left(7;+\infty\right)$

Пример 37. $\log_7 \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2+|x|-30}{x+6}<0$

Решение: неравенство равносильно

$$\frac{x^2-|x|-30}{x+6}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^2+x-30}{x+6}>\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\ge 0 \\ \dfrac{x^2-x-30}{x+6}>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x\in(\frac{16}{3};6)\cup(1-\sqrt{37};\frac{2-\sqrt{292}}{3})$

Пример 38. $\log_{((2x+2)/(5x-1))}(10x^2+x-2)\le 0$ Ответ $(-\infty;-1)U(1;\infty)$

Пример 39. $\log_{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)} 4<2(\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x+3)^{\frac{1}{2}})$ Ответ (3;9)

2.3.3. Неравенства вида $\log_{f(x)}\varphi(x)\ge\log_{f(x)}h(x)$

Неравенства данного раздела сводятся к решению следующих систем:

$$\begin{cases} \varphi(x)\ge h(x)>0 \\ f(x)>1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<\varphi(x)\le h(x) \\ 0<f(x)<1 \end{cases}$$

Аналогично $\log_{f(x)}\varphi(x)\le\log_{f(x)}h(x)$

$$\begin{cases} 0<\varphi(x)\le h(x) \\ f(x)>1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<h(x)\le\varphi(x) \\ 0<f(x)<1 \end{cases}$$

Пример 40. $\log_{x^2}(x^2-4x+3)>\log_{x^2}x^2$

Решение: неравенство равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x^2>1 \\ x^2-4x+3>x^2>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0<x^2<1 \\ 0<x^2-4x+3<x^2 \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{3}{4};1)$

Пример 41. $\lg_{|x-4|}\sqrt{x+7}>\lg_{|x-4|}|x+1|$

Решение: перепишем неравенство в виде

$\lg_{|x-4|}\dfrac{\sqrt{x+7}}{|x+1|}>0$, где $x\ne-1, x>-7$

Неравенство эквивалентно совокупности двух систем

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>5\\ x<3\end{array}\right.\\ x\neq -1\\ x+7>(x+1)^2\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}-1<x-4<1\\ x\neq 4\\ x>-7\\ x+7<(x+1)^2\end{cases}$$

Ответ: $(-3;-1)\cup(-1;2)\cup(3;4)\cup(4;5)$

Пример 42. $\log_{24-2x-x^2}(x+6)\le\log_{24-2x-x^2}(4-x)$

Решение: Неравенство эквивалентно совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x+6\le 4-x\\ 24-2x-x^2>1\end{cases}\\ \begin{cases}x+6\ge 4-x>0\\ 0<24-2x-x^2<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-6;-1)\\ x\in\left(\dfrac{-1-2\sqrt{6}}{2};\dfrac{-1+2\sqrt{6}}{2}\right)\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[-1;4)\\ x\in\left(-6;\dfrac{-1-2\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+2\sqrt{6}}{2};4\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{-1-2\sqrt{6}}{2};-1\right]\cup\left(\dfrac{-1+2\sqrt{6}}{2};4\right)$

Пример43.

$$(\log_{3-x}(2x+1))(\log_{2x+1}x^2)\le(\log_{3-x}(3x+1))(\log_{3x+1}(x+2))$$

Решение: переходя к основанию $(3-x)$, получим

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{3-x}x^2\le\log_{3-x}(x+2)\\ 2x+1>0\\ 2x+1\neq 1\\ 3x+1>0\\ 3x+1\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x>1\\ 0<x^2\le x+2\end{cases}\\ \begin{cases}0<3-x<1\\ 0<x+2\le x^2\end{cases}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\\ x\neq 0\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\frac{1}{3};0)\cup(0;2)\cup(2;3)$

Пример 44. $\log_{21+4x-x^2}(7-x)\ge\log_{21+4x-x^2}(x+3)$

Решение: неравенство эквивалентно совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}21+4x-x^2>1\\7-x\ge x+3>0\end{cases}\\\begin{cases}0<21+4x-x^2<1\\0<7-x\le x+3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(2-2\sqrt{6};2+2\sqrt{6}\right)\\x\in(-3;2]\end{cases}\\\begin{cases}\left(-3;2-2\sqrt{6}\right)\cup\left(2+2\sqrt{6};7\right)\\\left[2;7\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2-2\sqrt{6};2\right)\cup\left(2+2\sqrt{6};7\right)$

<u>Пример 45</u>. $\log_{\sqrt{x-1}}\dfrac{x-8}{x^2-2x-3}\le 0$

Решение: неравенство эквивалентно совокупности систем

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}>1\\0<x-8\le x^2-2x-3\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\sqrt{x-1}<1\\x-8\ge x^2-2x-3>0\end{cases}$$

Решение первой системы $x>8$; у второй системы решений нет.

Ответ: $x\in(8;+\infty)$

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенство	ответы
1) $\log_3\left(1-\dfrac{2}{3x+2}\right)<1$	$(-\infty;-1)U(0;+\infty)$
2) $2+\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<0$	$\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)$
3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)>0$	$\left(-1;-\dfrac{2}{3}\right)$

4) $2\cdot\log_x 3<1$ $\quad (0;1)U(9;+\infty)$

5) $1+3\log_x 2>0$ $\quad \left(0;\frac{1}{8}\right)U(1;+\infty)$

6) $\frac{\lg\left(7x^2-10x+4\right)}{\lg x}>2$ $\quad \left(\frac{2}{3};1\right)U(1;+\infty)$

7) $1+\log_x(8-7x)<0$ $\quad \left(\frac{1}{7};1\right)U\left(1;\frac{8}{7}\right)$

8) $\log_2\left(\frac{x}{2x-1}\right)+\log_2(x+1)\le 1$ $\quad (-1;0)U[1;2]$

9) $\frac{\lg\left(81x^2-144x+64\right)}{\lg x}>2$ $\quad \left(\frac{4}{5};\frac{8}{9}\right)U\left(\frac{8}{9};1\right)U(1,+\infty)$

10) $\log_2\frac{x^2-2x}{x-3}\le 3$ $\quad (0;2)U[4;6]$

11) $3+\log_{\sqrt{3}} x\le\log_3(6x+1)$ $\quad \left(0;\frac{1}{3}\right]$

12) $\log_x\left(9x^2-24x+16\right)<2$ $\quad (0,1)U\left(1;\frac{4}{3}\right)U\left(\frac{4}{3};2\right)$

13) $\log_x\left(5x^2-7x+3\right)>2$ $\quad \left(\frac{3}{4};1\right)U(1;+\infty)$

14) $\log_x\left(16-24x+9x^2\right)<2$ $\quad (0;1)U\left(1;\frac{4}{3}\right)U\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

15) $\log_2\left(\frac{x^2+4x}{x-2}\right)<4$ $\quad (-4;0)U(4;8)$

16) $\log_x\left(25x^2-40x+16\right)>2$ $\quad \left(\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right)U\left(\frac{4}{5};1\right)U(1;+\infty)$

17) $1+\log_x\left(\frac{x}{9x-8}\right)<0$ $\quad \left(\frac{8}{9};1\right)U(1;8)$

18) $\log_2\frac{x+1}{x}+\log_2(x+3)<3$ $\quad (-3;-1)U(1;3)$

19) $\lg\left(3+\frac{4}{x}\right)<0$ $\quad \left(-2;-\frac{4}{3}\right)$

20) $\log_3\left(3x^2-8x\right)\le 1$ $\left[-\frac{1}{3};0\right)U\left(\frac{8}{3};3\right]$

21) $\log_{\sqrt{2}} x+\log_2 3\le 2+\log_2\left(x+1\right)$ $\left(0;2\right]$

22) $\log_2\left(\frac{x}{x+2}\right)<1$ $\left(-\infty,-4\right)U\left(0;+\infty\right)$

23) $1+\log_2\left(\frac{2x-1}{x}\right)\ge\log_2\left(x+1\right)$ $\left(-1;0\right)U\left[1;2\right]$

24) $\log_{0,5}(2x+1)<\log_2(2-3x)$ $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

25) $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-\frac{5}{2}$ $\left(\frac{1}{2};2\right)$ $\left(\frac{1}{2};2\right)$

26) $(1,25)^{1-(\log_2 x)^2}<(0,64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$ $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(32;+\infty)$

27) $4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\le 8$ $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$

28) $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}<10^{-3}\cdot\left(10^{3-x}\right)^2$ $(-3;1)$

29) $x^{\log_3\left(x^2-2x-2\right)}>1$ $(0;1)\cup(3;+\infty)$

30) $5^{\lg\left(x^2-5x+\frac{17}{4}\right)}<\frac{1}{25}$ $\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2};\frac{5+\frac{\sqrt{201}}{5}}{2}\right)$

31) $3^{\log_6\left(x^2-4x-4\right)}<1$ $\left(-1;2-\sqrt{6}\right)\cup\left(2+\sqrt{6};5\right)$

32) $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}}>5\cdot 0,04^{x-1}$ $(3;+\infty)$

33) $\log_{\frac{14}{3}}\left(x^2+2x-3\right)<0$ $\left(-\infty;-1-\sqrt{5}\right)\cup\left(-1+\sqrt{5};+\infty\right)$

34) $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-2x+3\right)<\log_{\frac{1}{4}}(8+2x)$ $(-4;-1)\cup(5;+\infty)$

35) $\log_2\log_2\frac{12x-7}{x+1}>0$ $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{9}{10};+\infty\right)$

36) $\frac{\log_5(x-2)}{\log_5(x+3)}<0$ $(2;3)\cup(3;+\infty)$

37) $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_3 x>1$ $\left(1;\frac{3}{2}\right)$

38) $\log_{\frac{3}{5}}\frac{1}{x-2}>0$ $(3;+\infty)$

Глава III. Различные задачи, связанные с логарифмической и показательной функциями

§ 3.1. Смешанные уравнения и неравенства, содержащие логарифмическую и показательную функции

В настоящем разделе рассматриваются различные уравнения и неравенства, которые содержат показательные и логарифмические функции.

Пример 1 . $x^{\log_7 x} + 7^{\log_7^2 x} < 14$

Решение: ОДЗ: x>0

Согласно основному логарифмическому тождеству $x = 7^{\log_7 x}$,

тогда $x^{\log_7 x} = 7^{\log_7^2 x}$ и исходное неравенство принимает вид:

$$2 \times 7^{\log_7^2 x} < 14 \Leftrightarrow 7^{\log_7^2 x} < 7 \Leftrightarrow \log_7^2 x < 1$$

$$\left(\log_7 x - 1\right)\left(\log_7 x + 1\right) < 0$$

$$-1 < \log_7 x < 1 \Leftrightarrow \log_7 \frac{1}{7} < \log_7 x < \log_7 7 \Rightarrow \frac{1}{7} < x < 7$$ Ответ: $\left(\frac{1}{7};7\right)$

Пример 2. $3 - 2^x = \left|2^x - 3\right| \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+9}{2x+4}$ Ответ: {-7/2}

Пример 3. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6$ Ответ {3;1/3}

Решение: x>0; $(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6; 2x^{\log_3 x} = 6;$ $\log_3 x \times \log_3 x = 1; \Rightarrow$

Ответ {3;1/3}

Пример 4. $\log_{2^x-1}(x^2-6x+9) < 0$ Ответ (0;1)U(2;3)U(3;4)

Пример 5. $2^{2\lg x} + 2^3 = 6x^{\lg 2}$ Ответ {10;100}

Пример 6. $\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}(\frac{5}{9} + 3^{x-1})$

Ответ: (-3/2;-1)$\cup$(-1/2;0)

Пример 7. $\log_2\left(4^x + 4\right) = x + \log_2\left(2^{x+1} - 3\right)$

Решение:

$$\log_2\left(4^x + 4\right) = \log_2 2^x + \log_2\left(2^{x+1} - 3\right)$$

$$\log_2(4^x + 4) = \log_2\left[2^x\left(2 \times 2^x - 3\right)\right]$$

потенцируя по основанию 2, получим $4^x + 4 = 2 \times 2^{2x} - 3 \times 2^x$

$$2^{2x} + 4 = 2 \times 2^{2x} - 3 \times 2^x$$

Вводим новую переменную $y = 2^x > 0$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -1 (п.к.) \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2;$$

Проверка подстановкой x=2 в исходное уравнение подтверждает, что ответ {2}.

Пример 8. . $x^{2\lg^2 x} = 10x^3$

Решение: ОДЗ: x>0

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

$$2\lg^2 x \lg x = 1 + 3\lg x$$

$$2\lg^3 x - 3\lg x - 1 = 0$$

Раскладывая левую часть на множители, получим:

$$(\lg x + 1)\left(2\lg^2 x - 2\lg x - 1\right) = 0$$

$$1)\lg x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{10}$$

$$2)\, 2\lg^2 x - 2\lg x - 1 = 0 \Rightarrow \lg x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$x_2 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}; x_3 = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$ $x_2 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}; x_3 = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$ Ответ: $\left\{\frac{1}{10}; 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}; 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\right\}$

Пример 9. . $9^{2(\log_6 x)^{-2}} + 9 = 10 \times 9^{(\log_6 x)^{-2}}$,

Решение: ОДЗ:x>0,x≠1 Используем замену переменной $y = 9^{(\log_6 x)^{-2}} > 1$

$$y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow y_1 = 9; y_2 = 1$$

$$1)9^1 = 9^{(\log_6 x)^{-2}} \Leftrightarrow (\log_6 x)^{-2} = 1 \Leftrightarrow \log_6 x = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}; 6$$

$2)1 = 9^0 = 9^{(\log_6 x)^{-2}}$ не имеет решения. Ответ: $\{1/6; 6\}$

Пример 10. $\log_2\left(9 - 2^x\right) = 10^{\lg(3-x)}$

Решение: ОДЗ:x<3

$$\log_2\left(9 - 2^x\right) = 3 - x; 2^{3-x} = 9 - 2^x$$

$\frac{8}{2^x} - 9 + 2^x = 0,\quad 2^{2x} - 9 \times 2^x + 8 = 0$ Замена переменной $y = 2^x > 0$

$$y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3(п.к.)$$

$y_2 = 1 \Rightarrow 2^x \Rightarrow x = 0;$ $\quad$ $Ответ: \{0\}$

Задачи для самостоятельного решения.

Решить уравнение | ответы

1. $\log_3 x^3 + \log_2 x^2 = \frac{2\lg 6}{\lg 2} + 1$	$\{3\}$
2. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$	$\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$	$\{2\}$

4. $\dfrac{1}{\log_6(3+x)}+\dfrac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1$ $\{3\}$

5. $\log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right)=\dfrac{2}{\log_x 3}$ $\{\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\}$

6. $\sqrt[3]{1+\lg tgx}+\sqrt[3]{1-\lg tgx}=2$ $\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k\}$

7. $\dfrac{\lg\sqrt{3x-1}-\lg x}{2+\lg\sqrt{2}+\lg 0{,}01}=1$ $\{1;\ \dfrac{1}{2}\}$

8. $\sqrt[x]{3}-\sqrt[2x]{3}-2=0$ $\{\dfrac{1}{2\log_3 2}\}$

9. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\log_3\left(x^2-1\right)}=\sqrt{2(x-1)}$ $\{3\}$

10. $(\log_2)^2=2+2\log_2\sqrt{x}$ $\{\dfrac{1}{4};1\}$

11. $3^{1-2\log_3\sqrt{x-1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2(x-1)}}$ $\{3\}$

12. $\dfrac{2\lg 2+\lg(x-3)}{\lg(7x+1)+\lg(x-3)+\lg 1}=\dfrac{1}{2}$. $\{\dfrac{49}{9}\}$

13. $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{1}{2}}-3^{2x-1}$ $\{\dfrac{1}{2}.\}$

14. $(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x=2$ $\{4;\ \dfrac{1}{2}\}$

15. $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x-1}=5$ $\{32;\ \dfrac{1}{5}\}$

16. $\lg\sqrt{2}-\lg\sqrt{5x-4}=\lg\sqrt{x+1}$ $\{1\}$

17. $2\cdot\log_x 3\cdot\log_{3x} 3=\log_{9\sqrt{x}} 3$ $\{9;\ \dfrac{1}{3}\}$

18. $\dfrac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-4}}=3$ $\{3;8\}$

19. $\log_3\left(4\cdot 3^{x-1}-1\right)=2x-1$ $\{3;1\}$

20. $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)+\left(\log_3 x\right)^2=1$ $\{\dfrac{1}{9};3;1\}$

21. $\lg 100+\dfrac{1}{3}\cdot\lg\left(1125-5^{\sqrt{3x}}\right)=3$ n $\{3\}$

22. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$ $\{\dfrac{3}{2}\}$

23. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(5x+3)=-2$ $\{\dfrac{7}{5}\}$

24. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$ {2;-2}

25. $3^{1-x}\cdot 2^{2x}-7\cdot 2^x=2\cdot 3^x.$ $\{\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)}\}$

26. $\lg\left(2^{x-2}+9\right)+\lg 2=1+\lg\left(2^{x-2}+1\right)$ {2}

27. $\log_x\sqrt{3}+\log_x 3x=\log_x^2\sqrt{3}-3$ $\{\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt[8]{3}\}$

28. $-\log_x 64-\log_2 x+5=0$ {8;4.}

29. $\log_x 81-\log_3 x+3=0$ $\{81;\frac{1}{3}\}$

30. $-\log_{\sqrt[3]{x}}16-\log_2 x+7=0$ {8;16}

31. $\log_{\sqrt{x}}16-\log_2 x-2=0$ $\{4;\frac{1}{16}\}$

§ 3.2. Уравнения и неравенства, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные ВУЗы

В данном параграфе рассматриваются примеры задач, предлагавшиеся в МГТУ им. Н.Э.Баумана, МГУ, МФТИ, МИЭМ, МЭИ в течение нескольких последних лет.

Пример 1. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x-2=0$ Ответ $\{\pi/4+2\pi k\}$

Пример2. $3\log_{a^2x}x+\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}x=2$ Ответ $\{a;a^{(4/3)}\}$

Пример 3. $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_4 x+\log_2^2 x=\frac{1}{2}\log_x x$ Ответ $\{2;1/\sqrt{2}\}$

Пример 4. $\sin(\pi\lg x)+\cos(\pi\lg x)=1$ Ответ $\{10^{2k};10^{(1/2+2n)},n,k\in Z\}$

Пример 5. $\log_2\left(3x^2-16x+13\right)\log_{2-3x}2\geq 2$

Решение: ОДЗ: $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

$$\frac{\log_2\left(3x^2-16x+13\right)}{\log_2\left(2-3x\right)}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{\log_2\frac{3x^2-16x+13}{\left(2-3x\right)^2}}{\log_2\left(2-3x\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{3x^2-16x+13}{(2-3x)^2}-1}{2-3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2+4x-9}{(2-3x)(3x-1)} \geq 0$$

С учетом ОДЗ решение неравенства имеет следующий вид: $x \in \left[\frac{2-\sqrt{58}}{6};\frac{1}{3}\right)$. Ответ: $\left[\frac{2-\sqrt{58}}{6};\frac{1}{3}\right)$

Пример 6. Решить $\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|} \geq 0$

Решение:

$$\frac{\log_2(2x+8)-\log_2(13-x)}{(x^2+2x-3)^2-(2x^2-10x+8)^2} \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x+8>0 \\ 13-x>0 \\ \frac{(2x+8)-(13-x)}{\left((x^2+2x-3)-(2x^2-10x+8)\right)\left((x^2+2x-3)+(2x^2-10x+8)\right)} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textit{Ответ}: (-4;11)\setminus\{1;\frac{5}{3}\}$$

Пример 7. $\log_{(1/3)}\log_2((x^2 - |x| - 12)/(x+3))>0$ Ответ $(-\sqrt{15};(1-\sqrt{73})/2)\cup(5;6)$

Пример 8. $\log_{x+1}9x/2 \geq \log_{1/x+1}9/(2x)$ Ответ $[1/2;1]\cup[2;\infty)$

Пример 9. $\log_2^2x + \log_x 4 \geq -1$ Ответ $(0;1/2]\cup(1;\infty)$

Пример 10. $\log_2^2x + 3\log_2 x \times \log_2(x-2) + 2\log_2^2(x-2) \geq 0$

Ответ $(2;1+\sqrt{2}]\cup[(1/2)(3+\sqrt{5});3)$

Пример 11. $\lg^2(x+1) \geq \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$ Ответ $[\sqrt{2};3]$

Пример 12. $|\log_3 x| + \log_{3x}3 \leq 5/2$ Ответ $[1/27;1/3)\cup[1/\sqrt{3};3^{(3+\sqrt{33})/4}]$

Пример 13. $\lg(1/x)\lg(10^5x)\lg(x/10^3) \leq 0$ Ответ $[10^{-5};1]\cup[10^3;\infty)$

Пример 14. $\log_3^3x - 5\log_3^2x + 8\log 3x < 0$ Ответ $(0;1)$

Пример 15. $\log_{1/3}(x-1) + \log_{1/3}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}|5-x| = 1$ Ответ $\{2\}$

Пример 16. $(\log_2 x + \log_x 8)/\log_x(2x) \le 3$ Ответ (0;1/2)U(1;8]

Пример 17. $\log_2^2(-x) - 1 - \log_2(-x/2) = 0$ Ответ {-2;-1}

Пример18. $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \ge 0$

Ответ $(2-\sqrt{2};1]\cup[3;2+\sqrt{2})$

Пример 19. $\log_{x^2}|5x+2| < \frac{1}{2}$ Ответ $(-1;-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(0;1)$

Пример 20. . $\log_{2|x|+1}(7x+4) - \log_{7x+4}(2|x|+1) > 0$

Ответ $(-\frac{1}{2};-\frac{3}{7})\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(0;\infty)$

Пример21. $\frac{36}{\sqrt{\log_2 x - 2}} + \frac{4}{\sqrt{\log_2 x - 7}} \le 28 - 4\sqrt{\log_2 x - 2} - \sqrt{\log_2 x - 7}$

Ответ ($x = 2^{11}$)

Пример 22. $\log_{(20-2x)}\left(99-2x-x^2\right) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}\left(20-2x\right) \le 3$

Решение: ОДЗ (-11;9) Обозначим $t = \log_{(20-2x)}\left(99-2x-x^2\right)$, тогда наше неравенство преобразуется в $\frac{(t-1)(t-2)}{t} \le 0$, или

$$\left[\begin{array}{l}\log_{(20-2x)}\left(99-2x-x^2\right) < 0\\ \begin{cases}\log_{(20-2x)}\left(99-2x-x^2\right) \le 2\\ \log_{(20-2x)}\left(99-2x-x^2\right) \ge 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$учитывая, что20-2x>1 на множестве допустимых значений получаем

$$\left[\begin{array}{l}\left(-11;-1-3\sqrt{11}\right)\cup\left(-1+3\sqrt{11};9\right)\\ \begin{cases}\left(-11;7\right]\cup\left[43/5;9\right)\\ \left[-\sqrt{79};\sqrt{79}\right]\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-11;-1-3\sqrt{11}\right)\cup\left[-\sqrt{79};7\right]\cup\left[43/5;\sqrt{79}\right]\cup\left(-1+3\sqrt{11};9\right)$

Пример 23. $\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right) + 2\log_{\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right)}\left(\frac{13}{2}-x\right) \le 3$

Решение: ОДЗ : $x \in \left(\frac{-11}{2};\frac{1-4\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-4\sqrt{6}}{2};\frac{1+4\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+4\sqrt{6}}{2};\frac{9}{2}\right)$

Пусть $t=\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right)$, тогда наше неравенство перепишется в виде $\frac{t^2-3t+2}{t}\le 0$, решениями будут $t\in(-\infty;0)\cup(1;2)$. Пусть $\frac{13}{2}-x>1$, тогда t будет возрастающей функцией, при этом условии решаем следующее двойное неравенство $1\le\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right)\le 2$. Его решением являются $x\in\left[\frac{-\sqrt{73}}{2};\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};\frac{\sqrt{73}}{2}\right]$. При $t<0$ имеем неравенство $\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right)<0$ решением которого с учетом ОДЗ будут $x\in\left(\frac{-11}{2};\frac{-1-4\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+4\sqrt{6}}{2};\frac{9}{2}\right)$. В случае $0<\frac{13}{2}-x<1$, т.е. когда t является убывающей функцией решений нет.

Ответ: $\left(\frac{-11}{2};\frac{-1-4\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left[\frac{-\sqrt{73}}{2};\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};\frac{\sqrt{73}}{2}\right]\cup\left(\frac{-1+4\sqrt{6}}{2};\frac{9}{2}\right)$

Глава. IV. Нестандартные методы решения

§ 4.1. Переход к новой переменной, получаемой логарифмированием.

В данном разделе рассматриваются уравнения, при преобразовании которых используются следующие формулы:

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a} \qquad (1)$$

$$a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}} \qquad (2)$$

$$a^{\sqrt[n]{\log_a b}}=b^{\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}} \qquad (3)$$

справедливость этих формул можно установит логарифмированием выражения(1) по основанию с; формул (2) и (3) по основанию a или b.

Пример1. $5^{\log_2 x}+2x^{\log_2 5}=15$ Ответ $\{2\}$

Пример2. $2^{\sqrt{\log_2 x}}+x^{\sqrt{\log_x 2}}=4$ Ответ $\{2\}$

Пример3 $.9^{\sqrt[4]{\log_3 x}}-4x^{\sqrt[4]{\log_x^3 3}}+3=0$ Ответ {3}

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения Ответы

1) $3\cdot 3^{\lg x}-x^{\lg 3}=18$ $\{100\}$

2) $6\cdot 2^{\lg x}+x^{\lg 2}=28$ $\{100\}$

3) $2\cdot 2^{\lg x}+x^{\lg 2}=24$ $\{1000\}$

4) $x^{\log_4(3x)}=3^{\frac{1}{\log_3 2}}$ $\{\frac{1}{9};3\}$

5) $x^{\log_{16}(27x)}=3^{\frac{1}{\log_3 2}}$ $\{\frac{1}{81};3\}$

6) $x^{\log_{81}(8x)}=2^{\frac{1}{\log_2 3}}$ $\{\frac{1}{16};2\}$

7) $x^{\lg 4}-2^{\lg x}=12$. $\{100\}$

8) $x^{\lg 9}-8\cdot 3^{\lg x}=9$ $\{100\}$

9) $x^{\lg 4}-3\cdot 2^{1+\lg x}=16$ $\{1000\}$

§ 4.2.Замена переменных

При решении уравнений данного раздела используется замена переменных.

Пример 4. Решить уравнение:

$$\log_7(3-2x)\log_x(3-2x)=\log_7(3-2x)+\log_7 x^2$$

Решение: ОДЗ: $0<x<\frac{3}{2};x\neq 1$

Перейдем к основанию 7.

$$\log_7^2(3-2x)=\log_7(3-2x)\log_7 x+2\log_7^2 x$$

Пусть $\log_7(3-2x)=u,\log_7 x=v$ тогда исходное уравнение запишется

$$u^2-uv-2v^2=0\Leftrightarrow(u+v)(u-2v)=0$$

Получаем следующую совокупность двух уравнений:

$$\log_7(3-2x)+\log_7 x=0$$

$$\log_7(3-2x)-2\log_7 x=0$$

Решение первого уравнения:

$$(3-2x)x=1 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{1}{2};$$

Первое решение не подходит по ОДЗ.

Решение второго: $3-2x=x^2 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=-3; x_2=1;$

Оба решения не входят в ОДЗ. Ответ: $\{1/2\}$.

§ 4.3.Эквивалентная замена выражения

При решении смешанных неравенств иногда бывает целесообразно использовать следующее свойство показательных и логарифмических функций: знак выражения a^b-a^c совпадает со знаком выражения $(a-1)(b-c)$, а выражение $\log_a b$ имеет один знак с выражением $(a-1)(b-1)$, что позволяет заменить логарифмическую и показательную функции на более простые выражения.

Пример 5. $\dfrac{2-2^{\frac{-2}{x}}}{(x+4)\ln(1-x)} \geq 0$

Решение: ОДЗ: $x \neq 0, x<1$

$$\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{(x+4)(1-x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)}{x^2(x+4)} \leq 0$$

Ответ: $x \in (-4,-2]$

Пример 6. Решить неравенство:

$$\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2},$$

Решение: $x \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^4+1}{4x^2}-1\right)\left(x-2-\left(-3x^2+x\right)\right)<0 \Rightarrow \left(x^4-4x^2+1\right)\left(3x^2-2\right)<0,$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}};0\right) \cup \left(0;\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

Пример 7: Решить $\dfrac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geq 0$

Заменим каждый множитель на выражение того же знака

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x} \geq 0 \text{ при условии } x>\frac{1}{5}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Пример 8.

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)\le\log_{\frac{1}{3}}\left(\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right|+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)$$

Решение: О.Д.З. $\begin{cases}3x-x^2-\dfrac{5}{4}>0\\ \sqrt{6-x}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Переходя к новым основаниям исходное неравенство можно преобразовать к следующему виду:

$$-\log_2\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)\le-\log_3\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\frac{\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)}{\log_3 2}$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)\left[\log_2\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)-\log_2\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\right]\ge 0$$

$$\Rightarrow\left(3x-x^2-\frac{5}{4}-1\right)\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)-\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\right]\le 0$$

(Т.к. знак выражения $\log_2 a-\log_2 b$ тот же что и у $a-b$)

$$\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\left(x-\sqrt{6-x}\right)\ge 0\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\left(x-\sqrt{6-x}\right)\ge 0$$ Ответ: $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\cup\left[2;\dfrac{5}{2}\right)$

<u>Пример 9</u>. $.2+\log_{\sqrt{x^2-2x-3}}\dfrac{x+4}{x+1}\ge\log_{x^2-2x-3}(x^2-2x-2)^2$

Решение: $1+\log_{x^2-2x-3}\dfrac{x+4}{x+1}\ge\log_{x^2-2x-3}\left|x^2-2x-2\right|$

$$\Leftrightarrow\log_{x^2-2x-3}\frac{(x^2-2x-3)(x+4)}{x+1}\ge\log_{x^2-2x-3}\left|x^2-2x-2\right|$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\dfrac{(x+1)(x-2)(x+4)}{(x+1)\left|x^2-2x-2\right|}-1}{(x^2-2x-3)-1}\,{}^{3}0\\ (x+1)(x-3)>0(\text{Þ}x^2-2x-2>0,x+1^{1}0)\\ (x-2)(x+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-\dfrac{3}{10}}{(x-(1+\sqrt{5})(x-(1-\sqrt{5}))}\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-4\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{10}{3}\\ 3<x<1+\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Ответ: $(3;1+\sqrt{5})\cup(\dfrac{10}{3};+\infty)$

§ 4.4. Использование свойств показательной и логарифмической функций

4.4.1. Решение на основе анализа области допустимых значений

При решении уравнений данного раздела рассматривается область определения функции.

Пример 10. $\log_x \log_2\left(4^x-6\right)>0$

Обычно при решении неравенств такого вида рассматриваются два случая: 0<x<1 и x>1, переходя к соответствующей совокупности двух систем неравенств.

Для данного неравенства целесообразно рассмотреть область определения функции. $4^x-6>0 \Rightarrow x>1$

Следовательно, исходное неравенство равносильно следующему:

$\log_2\left(4^x-6\right)>1$ Отсюда $\left(4^x-6\right)>2$, $2^{2x}>2^3 \Rightarrow x>\dfrac{3}{2}$ Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Пример 11. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+6\right)+1}=x-4+\sqrt{\log_3\left(x-1\right)-1}$

Решение: Рассмотрим области определения выражений, входящих в уравнение.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+6\right)\geq -1$, т.е. $0<x^2-5x+6\leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x^2-5x+4\leq 0 \end{cases}$

$x\in(1;2]\cup(3;4]$

$\log_3\left(x-1\right)-1\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 3 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[4;+\infty)$

Область допустимых значений содержит одну точку x=4. Ответ {4}.

4.4.2. Использование свойств монотонности

Решения уравнений данного раздела основываются на использовании монотонности функций.

Пример 12. $2^x+3^x+4^x<3$

Решение: Показательные функции $2^x,3^x,4^x$ - непрерывные и монотонно возрастающие, следовательно функция $y=2^x+3^x+4^x$ также непрерывная и монотонно возрастающая.

При x=0 y=1+1+1=3

При x<0 $y=2^x+3^x+4^x<3$

При x>0 $y=2^x+3^x+4^x>3$, следовательно решением исходного неравенства являются x<0. Ответ: (-∞;0)

Пример 13. $\log_6(1-x) = x+6$

Решение: ОДЗ: x<1. При x=-5 обе части уравнения равны 1, x=-5 является корнем исходного уравнения. Докажем, что –5 - единственный корень. Функция $y = \log_6(1-x)$ в своей области определения ($x\in(-\infty;1)$), убывает, функция y=x+6 – возрастает. Следовательно, других корней уравнение не имеет.

4.4.3. Метод мажорант

Мажорантой данной функции f(x) на множестве P называется такое число M, что либо f(x)≤M для всех $x\in P$, либо f(x)≥M для всех $x\in P$

Пример 14. $6x - x^2 - 5 = 2^{x^2-6x+11}$

Решение: Левая часть не больше четырех. Равенство четырем достигается в точке $x = 3$. Правая часть имеет минимум в точке x=3, и равна в этой точке четырем. Пересечение областей значений левой и правой частей исходного уравнения равно четырем, при x=3. Следовательно, x=3 является корнем данного уравнения. Ответ: $\{3\}$

Пример 15. $\log_2(3+2x-x^2) = x^2 - 2x + 3$

Решение: Область значений функции, стоящей в левой части уравнения –$(-\infty;2]$, причем, наибольшее значение, равное двум, достигается в точке x=1. Область значений функции в правой части равна $[2;+\infty)$, наименьшее значение при x=1. Пересечение областей равно двум. Следовательно, корень уравнения равен 1

Ответ: $\{1\}$

Глава V. Системы уравнений

При решении систем уравнений, содержащих показательную и логарифмическую функции, используются в основном те же методы, что и при решении систем рациональных уравнений, такие как замена переменных, подстановка, разложение на множители, равносильные преобразования и др. Кроме этого, при решении рассматриваемых в данной работе задач необходимо учитывать свойства показательной и логарифмической функций. Рассмотрим примеры решения систем уравнений.

Пример 1. Используем подстановку и замену переменных.

$$\begin{cases} x + \log_2(y+4) = 4 & (1) \\ e^{\ln y} + 2^x = 6 & (2) \end{cases}$$

Решение:

Область допустимых значений: y>0.

Преобразуем уравнение (2): $y = 6 - 2^x$ (3)

Подставляя (3) в уравнение (1), получим: $x + \log_2(10 - 2^x) = 4$,

откуда следует $\log_2(10 - 2^x) = 4 - x$ и $10-2^x=2^{4-x}$ (4)

Используем замену переменных $2^x=t>0$.

Уравнение (4) принимает вид: $t^2 - 10t + 16 = 0$, которое имеет корни $t_1=8$ и $t_2=2$.

Переходя к переменной x, получим x=1 и x=3.

Подставим полученное решение в выражение (3): $y_1=4$, $y_2=-2$ (посторонний корень).С учетом ОДЗ Ответ: (1; 4).

Пример 2. Используется подстановка и преобразование с учетом свойств логарифмической функции.

$$\begin{cases} \log_y x = 1 & (5) \\ \log_2 y + 2 = \log_2(x^2 + 3) & (6) \end{cases}$$

Решение:

Запишем ОДЗ: x>0, y>0, $y \neq 1$.

Из (5) следует, что y=x (7)

Подставляя (7) в (6), получим $\log_2 y + 2 = \log_2(y^2 + 3)$ (8)

После преобразования уравнение (8) принимает вид:

$\log_2(4y) = \log_2(y^2 + 3)$, откуда следует, что $y^2 - 4y + 3 = 0$ (9).

Уравнение (9) имеет корни $y_1=1$, $y_2=3$. Корень $y_1=1$противоречит ОДЗ. Из выражения (7) получим, что x=3. Ответ: (3,3).

Пример 3. (МФТИ 1998г.) Используется преобразование уравнений, подстановка и переход к совокупности.

$$\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x^2}{y} + x\right) + \log_{1/3}\left(\dfrac{y^2}{x} + y\right) = 2 & (10) \\ \log_2|x + y| = 1 & (11) \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем уравнение (10) исходной системы:

$$\log_3\left[\frac{x}{y}(x + y)\right] - \log_3\left[\frac{y}{x}(y + x)\right] = 2 \qquad (12)$$

Запишем ОДЗ: $\dfrac{x}{y}(x + y) > 0$ (13)

С использованием свойства логарифмической функции уравнение (12) принимает вид: $\log_3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 2$ (14)

Потенцируя систему уравнений (14), (11), получим

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 9 \\ |x + y| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{x}{y}\right| = 3 & (15) \\ |x + y| = 2 & (16) \end{cases}$$

С учетом ОДЗ система уравнений (15), (16) равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=3\\ x+y=2\end{cases} \qquad (17)\\ \begin{cases}\dfrac{x}{y}=-3\\ x+y=-2\end{cases} \qquad (18)\end{array}\right.$$

Решая систему уравнений (17), получим x=3/2, y=1/2 и систему уравнений (18) с корнями x=-3, y=1. Ответ: {(3/2; 1/2); (-3; 1)}.

В следующих примерах № 4, 5 воспользуемся введением новых переменных, в результате чего исходная система сводится к алгебраической системе уравнений.

Пример 4. $\begin{cases}16^x-3\cdot 3^y=3\\ 16^x\cdot 3^y=18\end{cases}$

Положив $16^x=u>0$, $3^y=v>0$, получим алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases}u-3v=3 & (19)\\ u\cdot v=18 & (20)\end{cases}$$

Выразим из уравнения (19) u=3v+3 и подставим в (20): $\begin{array}{l}3v^2+3v=18\\ v^2+v-6=0\end{array}$

откуда $v_1=-3$ (п.к.) $v_2=2$

Найдем $u_2=9$

Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases}16^x=9\\ 3^y=2\end{cases}$

которая имеет решение: $\left[\begin{array}{l}x=\log_4 3\\ y=\log_3 2\end{array}\right.$ Ответ: ($\log_4 3$; $\log_3 2$).

Пример 5. (МГУ 2001 г.) $\begin{cases}2\cdot 5^{1-y}=\log_3(x^{-2})\\ 5^y+\log_3 x=4\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: x>0

Воспользуемся заменой переменных $u=\log_3 x$, $v=5^y>0$,

тогда исходная система уравнений принимает вид: $\begin{cases}\dfrac{10}{v}+2u=0 & (21)\\ v+u=4 & (22)\end{cases}$

Выражая u из (22): u=4-v (23) и подставляя в (21), получим квадратное уравнение $v^2-4v-5=0$, которое имеет корни $v_1=5$, $v_2=-1$. Так как $v=5^y>0$, то значение $v_2=-1$ является посторонним. Из (23) следует, что u=-1. Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases}\log_3 x=-1\\ 5^y=5\end{cases}$, имеющей решение x=1/3, y=1.

Ответ: (1/3, 1).

Рассмотрим системы уравнений, содержащих переменные в показателе степени и в ее основании ,а также под знаком логарифма и в его основании.

Пример 6. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} & (24) \\ y^{x+y} = x^{3} & (25) \end{cases}$

Решение:
ОДЗ: x>0, y>0
Используя основное логарифмическое тождество, представим исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 10^{(x+y)\lg x} = 10^{12\lg y} \\ 10^{(x+y)\lg y} = 10^{3\lg x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\lg x = 12\lg y & (26) \\ (x+y)\lg y = 3\lg x & (27) \end{cases}$$

Из уравнения (26) $\lg y = \frac{(x+y)}{12}\lg x$ (28).

Подставим (28) в уравнение (27):

$$\frac{(x+y)^2}{12}\lg x = 3\lg x \text{ или } \lg x\left[\frac{(x+y)^2}{12} - 3\right] = 0 \qquad (29)$$

Из (29) следует x=1 либо y+x=6. Подставляя x=1 в выражение (28), получим y=1. Подставим y=6-x в выражение (28): $\lg(6-x) = \frac{\lg x}{2}$ (30)

Потенцируя уравнение (30), получим квадратное уравнение x^2-13x+36=0, имеющее корни x_1=4, x_2=9, которым соответствуют y_1=2, y_2=-3 (п.к.)

Ответ: {(1,1); (4,2)}.

Пример 7. (МГУ 1998 г.) $\begin{cases} y^x = 3y & (31) \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x & (32) \end{cases}$

Решение:
ОДЗ: y>0, $y \neq 1$
Прологарифмируем уравнение (31) по основанию 3:

$x\log_3 y = 1 + \log_3 y$, из которого $x = \frac{1+\log_3 y}{\log_3 y}$ (33)

Преобразуем (32): $2\log_3 y + \frac{1}{\log_3 y} = 3x$ (34)

Подставим (33) в (34): $2\log_3 y + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{3(1+\log_3 y)}{\log_3 y}$ (35)

Заменяя $\log_3 y = t$ и приводя к общему знаменателю уравнение (35), получим $2t^2$-3t-2=0, которое имеет корни t_1=2, t_2=-1/2. Из условия t_1=2 следует, что $\log_3 y$=2, откуда y_1=9.

Из условия $\log_3 y$=-1/2 следует, что $y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставим y_1 и y_2 в выражение (33), в результате чего получим x_1=3/2, x_2=-1. Ответ: {($\frac{3}{2}$;9);(-1; $\frac{1}{\sqrt{3}}$)}.

В следующих примерах используются равносильные преобразования уравнений системы, а именно переход к разности или сумме уравнений.

Пример 8. (МГУ 2003 г.) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_7(x-y)+7^{xy}=1 & (36) \\ 7^{xy}+\log_7(x-y)=1 & (37) \end{cases}$

Решение.

Вычтем из (36) уравнение (37): $\log_7(x-y)=0$ (38)

Подставим (38) в (36): $7^{xy}=1$. Исходная система уравнений (36), (37) равносильна следующей:

$$\begin{cases} \log_7(x-y)=0 & (38) \\ 7^{xy}=1 & (39) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: {(0,-1);(1,0)}

Пример 9. (МГУ 2003 г.) $\begin{cases} 4\cdot 49^x-4\cdot 7^{x+y\log_7 3}+9^y=9 \\ 49^x+12\cdot 3^{x\log_3 7+y}-4\cdot 9^y=9 \end{cases}$

Решение.

Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} 4\cdot 7^{2x}-4\cdot 7^x\cdot 3^y+3^{2y}=9 & (40) \\ 7^{2x}+12\cdot 7^x\cdot 3^y-4\cdot 3^{2y}=9 & (41) \end{cases}$$

Введем новые переменные $u=7^x>0$, $v=3^y>0$.

Тогда система уравнений (40), (41) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 4u^2-4uv+v^2=9 & (42) \\ u^2+12uv-4v^2=9 & (43) \end{cases}$$

Вычитая из (42) уравнение (43), получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 3u^2-16uv+5v^2=0 & (44) \\ u^2+12uv-4v^2=9 & (45) \end{cases}$$

Решим уравнение (44) относительно u: дискриминант уравнения (44) равен $D=196v^2$

$$u_{1,2}=\frac{16v\pm 14v}{6}$$

Откуда $u_1=5v$ (46)

$$u_2=\frac{v}{3} \quad (47)$$

Подставляя (46) в (45), получим $25v^2+60v^2-4v^2=9$

Или $81v^2=9$, $v=\pm\frac{1}{3}$

Так как $v>0$, то $u_1=5/3$, $v_1=1/3$. Подставляя (47) в (45), получим $\frac{v^2}{9}+4v^2-4v^2=9$

Или $\frac{v^2}{9}=9, v=\pm 9$

V=-9 является посторонним корнем. Следовательно, $v_2=9$ $u_2=3$.
Найдем неизвестные x и y:

$$7^x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \log_7 \frac{5}{3}$$

$$3^y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -1$$

Ответ: $\{(\log_7 5/3, -1);(\log_7 3; 2)\}$.

$$7^x = 3 \Rightarrow x = \log_7 3$$

$$3^y = 9 \Rightarrow y = 2$$

Пример №10. (МГУ 2000г.) В этом примере используются методы подстановки, замены переменных и преобразования.

$$\begin{cases} \log_2(xy)\log_{4x} y = 2 & (48) \\ 8x - y = 1 & (49) \end{cases}$$

Решение:

Запишем ОДЗ: y>0, x>0, $x \neq \frac{1}{4}$

Используем замену переменных: $u = \log_2 x; v = \log_2 y$

Тогда уравнение (48) запишется следующим образом:

$$(u+v)\cdot\frac{v}{2+u} = 2 \text{ или } v^2 + vu - 2u - 4 = 0 \qquad (50)$$

Решим уравнение (50) относительно v. Найдем дискриминант

$$D = u^2 + 8u + 16 = (u+4)^2$$

$$v_{1,2} = \frac{-u \pm (u+4)}{2}$$

$$v_1 = 2$$

$$\log_2 y = 2$$

$$y = 4$$

Подставляя y=4 в (49) получим 8x-4=1, откуда x=5/8.
Второе решение уравнения (50) равно

$$v_2 = -u - 2 \qquad (51)$$

Откуда получим : $\log_2 y = -\log_2 x - 2$ (52)

Потенцируем (52): xy=1/4 (53)

Решим систему уравнений (49), (53)

$$\begin{cases} 8x - y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{4} \\ x_2 = -\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

Оба корня противоречат ОДЗ. Ответ: (5/8, 4).

Задачи для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений: ответы

1. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$ $\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right);\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right)\right\}$

2. МГУ 2001 г. $\begin{cases}\log_2\sqrt{y}=-3^{1-x}\\ 3^x+\log_2 y=1\end{cases}$ $\left(1;\frac{1}{4}\right)$

3. МФТИ $\begin{cases}2\log_2\sqrt{x}+2^y=-1\\ \log_2 x^3+4^y=1\end{cases}$ $\left(\frac{1}{32};2\right)$

4. МГУ 2000 г. $\begin{cases}3\log_5 x+\log_{\sqrt[3]{5}} y=3\\ \log_5(y-x-2)+\log_{125}(y-x+2)^3=\log_5 12\end{cases}$ $(1;5)$

5. МГУ 2000 г. $\begin{cases}9\cdot 2^x\cdot 5^y-5\cdot 3^{x+y}=3^x\cdot 5^y\\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y}=1\end{cases}$ (2;1)

6. $\begin{cases}x+2y=5\\ \log_2 x+\log_2 y=1\end{cases}$ {(1; 2);(4;1/2)}

7. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{cases}$ (2; 6)

8. $\begin{cases}y^{x^2+7x+12}=1\\ x+y=6\end{cases}$ {(5, 1);(-4, 10);(-3, 9)}

9. $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}\\ xy=16\end{cases}$ {(8, 2);(1/4, 64)}

10. $\begin{cases}\log_x 10+\log_y 10=5\\ \lg x+\lg y=\frac{5}{4}\end{cases}$ $\{(10;\sqrt[4]{10});(\sqrt[4]{10};10)\}$

11. $\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\frac{65}{36}\\ xy-x+y=118\end{cases}$ {(12, 10);(-10, -12)}

12. $\begin{cases}(x-y)^{x+y}=16\\ (x-y)^2\cdot 2^{x+y}=64\end{cases}$ {(3, -1);(3, 1)}

13. $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}}=32\cdot 8^{\frac{y}{x}}\\ 3^{\frac{x}{y}}=3\cdot 9^{\frac{1}{y}-1}\end{cases}$ $\left\{(-2;4);\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$

14. $\begin{cases}y^x=x^y\\ y^y=x^{9x}\end{cases}$ $\{(1;1);(\sqrt{3};3\sqrt{3})\}$

15. МФТИ 2004 г. $\begin{cases}(x-2)(x+3)=y(y-5)\\ \log_x(2-y)=\frac{x}{y^2}\end{cases}$ (4; -2)

16. МГУ 2003 г. $\begin{cases}5\log_{32}(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(3y-8)=0\\ x^2+2x+y^2+y=12\end{cases}$ (-2; 3)

17. МГУ 2003 г. $\begin{cases} 9^x - 3^{x+1} \cdot 2^y - 4^{y+1} = 0 \\ 9^x + 3^x \cdot 2^{y+1} - 2 \cdot 4^y = 11 \end{cases}$ $\left(\frac{3}{2}\log_3 2; -\frac{1}{2}\right)$

18. МГУ 2003 г. $\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0 \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}; \log_3 3\sqrt{2}\right)$

19. МФТИ 1984 г. $\begin{cases} 5 + \log_y x^2 = -\log_{\sqrt{x}} y \\ \dfrac{(\log_5 y)^2}{\log_5 x} = 6 - 3^{x^2 y} - \log_{25} y \end{cases}$ $\left\{\left(5; \frac{1}{25}\right); \left(\sqrt[3]{(\log_3 6)^2}; \sqrt[3]{\log_6 3}\right)\right\}$

20. МФТИ 1999 г. $\begin{cases} \log_3(5y - x - 2) - \log_9(x - y)^2 = 1 \\ \log_3(1 - \dfrac{2}{y} - 4x) - \log_9 x^2 = 1 \end{cases}$ $\left(1 - \sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

21. МФТИ 2000 г. $\begin{cases} \log_2^2(x + y) + \log_{\frac{1}{2}}(x + y)\log_{\frac{1}{2}}(x - 2y) = 2\log_2^2(x - 2y) \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}$ $\left\{(2;0); \left(\frac{43}{4}; \frac{21}{4}\right)\right\}$

22. МФТИ 2003 г. $\begin{cases} \dfrac{\log_5(5x - 3y - 1)}{\log_5(2y - x + 3)} = \dfrac{\log_2(5 + 4y - 3x) - 1}{\log_2(3x - y + 1)} \\ 2x^2 + y^2 = 3xy + x + 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2\right)$

23. МФТИ 1998 г. $\begin{cases} \log_2(x^2 y + 2xy^2) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \\ \log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right| = 0 \end{cases}$ {(2, -3);(-6, 1)}

24. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$ $\left(\frac{2}{3}; \frac{27}{8}; \frac{32}{3}\right)$

25. $\begin{cases} \log_2 x\left(\dfrac{1}{\log_x 2} + \log_2 y\right) = 2\log_2 x \\ \log_2 x \log_3(x + y) = 2\log_3 x \end{cases}$ $(2;2)$

26. $\begin{cases} x^y = 5x - 4 \\ \log_x 16 = y \end{cases}$ (4;2)

27. $\begin{cases} 2^{2\log_2 x} + 3^{2\log_3 y} = 8 \\ 2^{2\log_{\frac{1}{2}} x} + 3^{2\log_{\frac{1}{3}} y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (2;2)

28. $\begin{cases} 3\left(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y\right) = 10 \\ xy = 81 \end{cases}$ (3;27)(27;3)

29. $\begin{cases} 3\left(\dfrac{1}{\log_x y}+\log_x y\right)=10 \\ xy=81 \end{cases}$ (3;27)(27;3)

Литература:

1. И.Ф.Шарыгин,В.И. Голубев. Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. общеобразовательных учреждений.-М.:Просвещение,1995.
2. Е.В.Якушева и др. Математика. Ответы на вопросы. М.1Федеративная Книготорговая Компания,1997
3. Н.Я.Виленкин и др. Алгебра и математический анализ. Для 11 класса.-М.:Просвещение,1996
4. С.Н.Олехник и др. Уравнения и неравенства.-М.Дрофа,2001.
5. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Под редакцией Г.Н.Яковлева., М.,Наука,1981.
6. В.В.Ткачук. Математика абитуриенту.,МЦНМО,2001
7. А.В. Васильев, А.И.Заз. Математика. М. , МГТУ им.Баумана,1998.
8. Моденов П.С. Сборник задач по математике. Сов. наука. 195

Содержание