Вариант 1

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19. Сократите дробь $\dfrac{3^2 \cdot 36^n}{2^{2n+1} \cdot 3^{2n}}$.

Решение. $\dfrac{3^2 \cdot 36^n}{2^{2n+1} \cdot 3^{2n}} = \dfrac{3^2 \cdot \left(2^2 \cdot 3^2\right)^n}{2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}} = \dfrac{3^2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}}{2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Верно применены свойства степени с целым показателем, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20. Первая труба наполняет бассейн в $1\dfrac{1}{5}$ раза быстрее второй. Сколько литров в минуту пропускает первая труба, если известно, что она пропускает на 9 литров в минуту больше, чем вторая?

Решение. Пусть первая труба пропускает x литров в минуту, тогда вторая труба пропускает $x - 9$ литров в минуту.

Первая труба наполняет бассейн за $\dfrac{1}{x}$ минут, вторая – $\dfrac{1}{x-9}$ минут.

По условию вторая труба наполняет бассейн дольше в $1\dfrac{1}{5}$ раза, получаем $\dfrac{1}{x-9} : \dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{5}$,

$5x = 6x - 54$, $x = 54$.

Значит, первая труба пропускает 54 литра в минуту.

Ответ: 54 литра в минуту.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

21. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ (с основаниями AB и CD) пересекаются в точке O. Докажите равенство площадей треугольников AOD и COB.

Решение.

Прямые AB и CD параллельны, следовательно, расстояния от точек D и C до прямой AB равны, тогда треугольники ABD и ABC равновелики как треугольники с общим основанием и равными высотами.

$S_{AOB} + S_{AOD} = S_{ABD} = S_{ACB} = S_{AOB} + S_{COB}$, откуда получаем $S_{AOD} = S_{COB}$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно	3
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

22. Постройте график функции $y=\dfrac{(x+1)(x^2-4x+3)}{x-1}$ и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

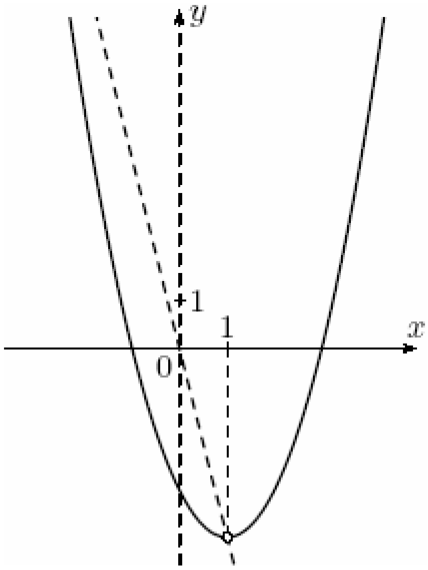
Решение.

$\dfrac{(x+1)(x^2-4x+3)}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x-1}=(x+1)(x-3)$ при $x\neq 1$.

Графиком функции является парабола с «выколотой» вершиной (1; –4).

Ветви параболы направлены вверх, парабола проходит через точки (–1; 0), (3; 0).

Построим график.



Прямая, проходящая через начало координат и через «выколотую» точку (см. рисунок), имеет с графиком ровно одну общую точку: $y=-4x$.

Ось *Oy* имеет с графиком функции ровно одну общую точку: $x=0$ (см. рисунок).

Ответ: $y=-4x$, $x=0$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, но указана только одна прямая (не рассмотрена ось ординат)	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

23. Диагонали выпуклого четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке *M*. Известно, что *AB* = *BC* = *CD*, *AM* = *MD* и $\angle ADC\neq\angle BAD$. Найдите угол *CMD*.

Решение.
Обозначим $\angle MAD = \angle MDA = \beta$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$.
По теореме о внешнем угле треугольника $\angle CMD = 2\beta$.
Через точку *B* проведем прямую, параллельную *AD*. Пусть эта прямая пересекается с продолжением диагонали *AC* в точке *K*.
Тогда *ABKD* – равнобокая трапеция, *DK* = *AB* = *CD*, $\angle BDK = \angle BAK = \alpha$,
$\angle KCD = \angle CKD = \angle AKD = \angle ABD = 180° - (\alpha + \beta) - \beta = 180° - \alpha - 2\beta$.
По теореме о внешнем угле треугольника
$\angle CDM = \angle KCD - \angle CMD = (180° - \alpha - 2\beta) - 2\beta = 180° - \alpha - 4\beta$. Тогда
$\angle CBD = \angle CDB = \angle CDM = 180° - \alpha - 4\beta$, а так как *AMB* – внешний угол треугольника *BMC*, то $\angle AMB = \angle MCB + \angle CBM$, или $2\beta = \alpha + (180° - \alpha - 4\beta)$, откуда находим, что $\beta = 30°$. Следовательно, $\angle CMD = 2\beta = 60°$.
Ответ: $60°$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

Вариант 1

1.	3
2.	1
3.	2
4.	$\left[-\frac{1}{6}; 1\right]$
5.	4
6.	55
7.	–0,2
8.	$q_1 = \frac{Fr^2}{kq_2}$
9.	213
10.	(–2; 2)
11.	16
12.	928
13.	0,25
14.	1
15.	6
16.	128
17.	120
18.	23

Вариант 2
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19. Сократите дробь $\dfrac{2^{2n+3}\cdot 6^n}{2^2\cdot 24^n}$.

Решение. $\dfrac{2^{2n+3}\cdot 6^n}{2^2\cdot 24^n}=\dfrac{2^3\cdot 2^{2n}\cdot 6^n}{2^2\cdot\left(2^2\cdot 6\right)^n}=\dfrac{2\cdot 2^{2n}\cdot 6^n}{2^{2n}\cdot 6^n}=2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Верно применены свойства степени с целым показателем, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20. Первая труба наполняет бассейн в $1\dfrac{2}{7}$ раза быстрее второй. Сколько литров в минуту пропускает вторая труба, если известно, что она пропускает на 14 литров в минуту меньше, чем первая?

Решение. Пусть вторая труба пропускает x литров в минуту, тогда первая труба пропускает $x + 14$ литров в минуту.

Вторая труба наполняет бассейн за $\dfrac{1}{x}$ минут, первая – $\dfrac{1}{x+14}$ минут.

По условию вторая труба наполняет бассейн дольше в $1\dfrac{2}{7}$ раза, получаем $\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x+14}=\dfrac{9}{7}$,

$7x+98=9x$, $x=49$.

Значит, вторая труба пропускает 49 литров в минуту.

Ответ: 49 литров в минуту.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

21. В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка M – середина отрезка BC. Отрезок AM пересекается с диагональю BD точке K. Докажите, что $BK : BD = 1 : 3$.

Решение.

Треугольники BKM и DKA подобны по двум углам ($\angle BMA=\angle MAD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AM, $\angle BKM=\angle AKD$ как вертикальны).

$\dfrac{BM}{AD}=\dfrac{BK}{KD}=\dfrac{1}{2}$, $DK=2BK$, откуда получаем $BK : BD = 1 : 3$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно	3
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

22. Постройте график функции $y=\frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x-2}$ и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

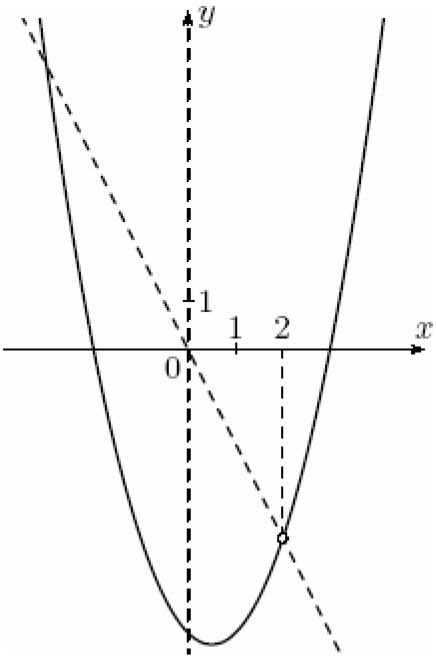
Решение.

$\frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{x-2}=(x+2)(x-3)$ при $x\neq 2$.

Графиком функции является парабола с «выколотой» точкой (2; –4).

Ветви параболы направлены вверх, (0,5; –6,25) – вершина, парабола проходит через точки (–2; 0), (3; 0).

Построим график.



Прямая, проходящая через начало координат и через «выколотую» точку (см. рисунок), имеет с графиком ровно одну общую точку: $y=-2x$.

Ось Oy имеет с графиком функции ровно одну общую точку: $x=0$ (см. рисунок).

Ответ: $y=-2x$, $x=0$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, но указана только одна прямая (не рассмотрена ось ординат)	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

23. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Известно, что $AB = BC = CD$, $AM = MD$ и $\angle ADC \neq \angle BAD$. Найдите угол AMD.

Решение.

Обозначим $\angle MAD = \angle MDA = \beta$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$.

По теореме о внешнем угле треугольника $\angle CMD = 2\beta$.

Через точку B проведем прямую, параллельную AD. Пусть эта прямая пересекается с продолжением диагонали AC в точке K.

Тогда $ABKD$ – равнобокая трапеция, $DK = AB = CD$, $\angle BDK = \angle BAK = \alpha$,

$\angle KCD = \angle CKD = \angle AKD = \angle ABD = 180° - (\alpha + \beta) - \beta = 180° - \alpha - 2\beta$.

По теореме о внешнем угле треугольника

$\angle CDM = \angle KCD - \angle CMD = (180° - \alpha - 2\beta) - 2\beta = 180° - \alpha - 4\beta$. Тогда

$\angle CBD = \angle CDB = \angle CDM = 180° - \alpha - 4\beta$, а так как AMD – внешний угол треугольника BMC, то $\angle AMB = \angle MCB + \angle CBM$, или $2\beta = \alpha + (180° - \alpha - 4\beta)$, откуда находим, что $\beta = 30°$. Следовательно, $\angle CMD = 2\beta = 60°$, $\angle AMD = 120°$.

Ответ: $120°$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

Вариант 2

1.	4
2.	10,5
3.	1
4.	$\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right) \cup (1; +\infty)$
5.	2
6.	144
7.	–2
8.	$r = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{F}}$
9.	432
10.	(3; –3)
11.	34
12.	1650
13.	0,2
14.	2
15.	4
16.	40
17.	24
18.	24