Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2016 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найдите $f\left(\dfrac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{3}{7}$.

Ответ: 29/35

Найдите $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{5}{3}$.

Ответ: 41/12

Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{5}{7}$.

Ответ: 11/14

Найдите $f\left(\dfrac{5}{3}\right)$, если $f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{4}{9}$.

Ответ: 37/18

Задача 2.

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 1

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-10=0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 3

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+6=0$ равна 1. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 5

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+10=0$ равна 3. Найдите все возможные значения a.

Ответ: ± 7

Задача 3.

Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 5 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $8\cos^2 x + \sin 2x = 3 + 2\cos 2x$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $6\cos^2 x + 3\cos 2x = 5\sin 2x - 2$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ -\operatorname{arctg} 11 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $2\cos 2x + 3\sin 2x + 4\cos^2 x = -1$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 7 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1+\log_x^2 3) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{3}] \cup (1, 3)$

Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}(1+\log_2^2 x) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in [\frac{1}{2}, 1) \cup (2, \infty)$

Решите неравенство $\log_{1+\log_5 x}(1+\log_x^2 5) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (\frac{1}{5}, 1) \cup [5, \infty)$

Решите неравенство $\log_{1+\log_x 7}(1+\log_7^2 x) \leqslant 1$.

Ответ: $x \in (0, \frac{1}{7}) \cup (1, 7]$

Задача 5.

Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

Ответ: $8\sqrt{2}$

Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC = CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2:3$.

Ответ: 2

Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T. Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C. Найдите площадь четырёхугольника $SACB$, если известно, что $CA = 5$, $CB \| AS$, а радиусы окружностей относятся как $11:16$.

Ответ: 32

Две окружности касаются внутренним образом в точке P. Хорда QR внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая PS пересекает внешнюю окружность в точках P и T. Найдите QT, если известно, что $PQ \| RT$, площадь четырёхугольника $PQTR$ равна $5\sqrt{5}$, а радиусы окружностей относятся как $7:10$.

Ответ: 3

Задача 6.

Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Ответ: В 12:00

Ровно в 10:00 из пункта А в пункт Б выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал грузовик. Когда до пункта А оставалось шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт А, если известно, что велосипедист прибыл в пункт А ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

Ответ: В 13:00

Ровно в 11:00 из пункта А в пункт Б выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал мотоциклист. Когда до пункта А оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придёт пешеход в пункт А, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт А ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

Ответ: В 13:30

Ровно в 13:00 из пункта А в пункт Б выехал мотоциклист. Проехав четверть пути, наблюдательный мотоциклист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда мотоциклист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автомобиль. Когда до пункта А оставалось пятая часть пути, не менее наблюдательный водитель автомобиля заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько приехал автомобиль в пункт А, если известно, что пешеход прибыл в пункт А ровно в 17:00? Скорости пешехода, мотоцикла и автомобиля считать постоянными.

Ответ: В 14:00

Задача 7.

В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K, так что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

Ответ: $25\sqrt{2}$

В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T, так что $LT : TM = 3 : 2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

Ответ: $4\sqrt{2}$

В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC, перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K, так что $CK : KD = 2 : 3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES.

Ответ: $49\sqrt{2}$

В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 10. Плоскость π параллельна ребру LM, перпендикулярна плоскости OPV и пересекает ребро MN в точке T, так что $MT : TN = 1 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость MNV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани NOV.

Ответ: $9\sqrt{2}$

Задача 8.

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos ax+\log_a\cos^{10}ax}+\sqrt{58+\log_a^2\sin ax-\log_a\sin^6 ax}+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg}ax+\log_a\operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $9\sqrt{5}$, $a=2$, $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13+\log_a^2\cos\frac{x}{a}+\log_a\cos^4\frac{x}{a}}+\sqrt{97+\log_a^2\sin\frac{x}{a}-\log_a\sin^8\frac{x}{a}}+\sqrt{20+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}+\log_a\operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $8\sqrt{5}$, $a=2$, $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157+\log_a^2\cos\frac{x}{a}-\log_a\cos^{12}\frac{x}{a}}+\sqrt{29+\log_a^2\sin\frac{x}{a}+\log_a\sin^4\frac{x}{a}}+\sqrt{47+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}-\log_a\operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $11\sqrt{5}$, $a=1/2$, $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65+\log_a^2\cos ax-\log_a\cos^8 ax}+\sqrt{10+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^2 ax}+\sqrt{125+\log_a^2\operatorname{tg}ax-\log_a\operatorname{tg}^{10}ax}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Ответ: $10\sqrt{5}$, $a=1/2$, $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$