Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2020 года

ВАРИАНТ 202

ОТВЕТЫ

1. 2

2. 243

3. $x = \pi/4 + 2k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \{1\}$

5. $\sqrt{6}$

6. $11/30$

7. $x = y = 1$

РЕШЕНИЯ

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-3}} + \dfrac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.

Решение: $f(12) = \sqrt{\frac{9+16}{16\cdot 9}} + \frac{19}{12} = \frac{5}{12} + \frac{19}{12} = 2.$

Ответ: 2

2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots$, состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $10/3$. Найдите отношение $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$ к $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.

Решение: Пусть q — знаменатель. Тогда $1 + q^2 = \frac{10}{3}q$, то есть $3q^2 - 10q + 3 = 0$. Стало быть, $q = 3$ или $q = 1/3$. Поскольку последовательность возрастающая, $q = 3$. Искомое отношение равно $(bq^5 + bq^6 + bq^7 + bq^8 + bq^9)/(b + bq + bq^2 + bq^3 + bq^4) = q^5 = 3^5 = 243$.

Ответ: 243

3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$.

Решение:

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x = x + \pi/4 + 2k\pi \\ 2x = \pi - x - \pi/4 + 2k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi/4 + 2k\pi \\ x = \pi/4 + 2k\pi/3 \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff x = \pi/4 + 2k\pi/3, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi/4 + 2k\pi/3, \ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right) \geqslant \log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Решение: Зафиксируем ОДЗ x: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. Далее, заметим, что

$$x^2+1+\frac{1}{x^2} = \left(x+1+\frac{1}{x}\right)\left(x-1+\frac{1}{x}\right).$$

Стало быть, при x из ОДЗ

$$\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x+1+\frac{1}{x}\right) \geqslant \log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right) \iff$$

$$\iff \log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x-1+\frac{1}{x}\right) \leqslant 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x > 0, \ x \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x(\left|2x-\frac{1}{2}\right|-1)} \leqslant 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff x \in \left(0, \tfrac{1}{4}\right) \cup \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right) \cup \{1\}.$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \{1\}$

5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH : HC$, если $BD : DA = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$.

Решение: Положим $BD = a$, $DA = b$, $AE = c$, $EC = d$, $BH = x$, $CH = y$. Тогда $x^2 = a(a+b)$ и $y^2 = d(c+d)$. Поскольку треугольники ABC и AED подобны, имеем также $b(a+b) = c(c+d)$. Стало быть,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{ac}{bd} = 6.$$

То есть $x/y = \sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB = BC = CD = 5$ и $CA = AD = DB = 6$. Найдите косинус угла между рёбрами BC и AD.

Решение: Рассмотрим треугольник ABC. Высота, опущенная из вершины B, равна 4, следовательно, высота AH, опущенная из вершины A, равна $24/5$. Отсюда получаем $CH = 18/5$, $BH = 7/5$. Пусть M — середина BC. Тогда $MH = 5/2 - 7/5 = 11/10$.

Пусть N — середина AD. Тогда $BN = CN$ и, стало быть, $MN \perp BC$. Аналогично, $MN \perp AD$. Рассмотрим плоскость, содержащую BC и параллельную AD. Спроецируем ортогонально на эту плоскость точки A и D. Полученные точки обозначим A' и D'. Точка N при этом проецируется в точку M. Стало быть, искомый угол равен $\angle A'MB$. Из прямоугольного треугольника $A'MH$ получаем

$$\cos \angle A'MB = \cos \angle A'MH = \frac{MH}{A'M} = \frac{MH}{AD/2} = \frac{11}{30}.$$

Ответ: $11/30$

7. Найдите все пары положительных чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}(x^4 + y^2 + 1) = \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2 + 1).$$

Решение: Заметим, что $x^4 + y^2 + 1 \geqslant 2x^2y + 1$ и $y^4 + x^2 + 1 \geqslant 2y^2x + 1$. Следовательно,

$$\log_{2x^2y+1}(x^4 + y^2 + 1) \geqslant 1 \geqslant \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2 + 1)$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда одновременно $x^4+y^2 = 2x^2y$ и $y^4+x^2 = 2y^2x$, то есть когда $x^2 = y$ и $y^2 = x$. Поскольку $x, y > 0$, имеем $x = y = 1$.

Ответ: $x = y = 1$