Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 213

ОТВЕТЫ

1. 12

2. 72%

3. $x = \pi/6 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (1, \sqrt{2}] \cup (2, 3]$

5. 2

6. $(1-\sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (\sqrt{2}-1)/2$

7. $1 : 2$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1}$.

Решение: $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}\right)^{-1} = 12$

Ответ: 12

2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?

Решение: Обозначим через x первоначальную стоимость автомобиля. Тогда итоговая цена равна $1,2 \cdot 0,6x = 0,72x$.

Ответ: 72%

3. Решите уравнение $2 \cdot \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)$.

Решение:

$$2\cdot\frac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{3}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right) \iff 2\cdot\frac{\cos 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}=\sqrt{3}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \iff$$

$$\operatorname{tg} 2x\cdot\frac{\cos x}{\cos x}=\sqrt{3} \iff 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \iff x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\pi/6+k\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1)-\log_{\sqrt{x+1}}(x-1)\geqslant 1$.

Решение:

$$\log_{x-1}(x+1)-\log_{\sqrt{x+1}}(x-1)\geqslant 1 \iff \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}-\frac{2\ln(x-1)}{\ln(x+1)}-1\geqslant 0 \iff$$

$$\frac{\ln^2(x+1)-2\ln^2(x-1)-\ln(x-1)\ln(x+1)}{\ln(x-1)\ln(x+1)}\geqslant 0 \iff$$

$$\frac{\Big(\ln(x+1)-2\ln(x-1)\Big)\Big(\ln(x+1)+\ln(x-1)\Big)}{\ln(x-1)\ln(x+1)}\geqslant 0 \iff$$

$$\begin{cases} x>1 \\ \dfrac{\big((x+1)-(x-1)^2\big)\big((x+1)-(x-1)^{-1}\big)}{(x-2)x}\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{x(3-x)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)x}\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$x\in(1,\sqrt{2}]\cup(2,3]$$

Ответ: $x\in(1,\sqrt{2}]\cup(2,3]$

5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M. Найдите BD, если известно, что $AM=MC=1$.

Решение: Поскольку K и L — точки касания, углы BKL и CLK равны. Стало быть, по теореме синусов

$$\frac{AK}{\sin\angle AMK}=\frac{AM}{\sin\angle AKM}=\frac{CM}{\sin\angle CLM}=\frac{CL}{\sin\angle CML},$$

откуда $AK=CL$. Обозначим через N точку касания окружности со стороной BC. Тогда $CL=CN$ и $BN=BK$. Получаем, что $AB=BC$. Аналогично, $AD=CD$. Отсюда следует, что $AC\perp BD$ и $S(ABCD)=BD\cdot AM$. Значит, $BD=2$.

Ответ: 2

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^6 x+\cos^6 x+a\cdot\sin 2x\geqslant a^2$$

выполняется для всех действительных x.

Решение: Заметим, что

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=$$

$$\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Положим $t = \sin 2x$. Теперь задача в том, чтобы описать все значения a, при которых для каждого $t \in [-1, 1]$ справедливо

$$3t^2 - 4at + 4(a^2 - 1) \leqslant 0.$$

Это выполняется тогда и только тогда, когда для $f(t) = 3t^2 - 4at + 4(a^2 - 1)$ справедливо $f(-1) \leqslant 0$ и $f(1) \leqslant 0$. Получаем

$$\begin{cases} 4a^2 + 4a - 1 \leqslant 0 \\ 4a^2 - 4a - 1 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (-1 + \sqrt{2})/2 \\ (1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (1 + \sqrt{2})/2 \end{cases} \iff \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Ответ: $(1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (\sqrt{2} - 1)/2$

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD, ACD, ABD и ABC в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1, считая от вершины D.

Решение: Пусть O — центр сферы и пусть A_2, B_2, C_2 — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно. Рассмотрим четырёхугольники $OA_1A_2D_1$, $OB_1B_2D_1$, $OC_1C_2D_1$. Каждый из них состоит из двух равных прямоугольных треугольников. При этом катеты OD_1, OA_1, OB_1, OC_1 равны. Из равенства расстояний от A_1, B_1, C_1 до плоскости ABC следует, что равны углы D_1OA_1, D_1OB_1, D_1OC_1, а стало быть, равны и углы $D_1A_2A_1$, $D_1B_2B_1$, $D_1C_2C_1$. Значит, равны отрезки D_1A_2, D_1B_2, D_1C_2, то есть D_1 является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. При этом D_1 — это ортоцентр ABC. Стало быть, треугольник ABC правильный. Поскольку углы $D_1A_2A_1$, $D_1B_2B_1$, $D_1C_2C_1$ равны, DD_1 — высота пирамиды. Опустим из A_1 перпендикуляр A_1D_2 на DD_1. Тогда радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ равен A_1D_2. Радиус же окружности, описанной около треугольника ABC равен AD_1. Получаем, что $A_2D_1 = \frac{1}{2}AD_1 = \frac{1}{2} \cdot 4A_1D_2 = 2A_1D_2$. Отсюда видим, что $\angle D_1A_2A_1 = 60°$. Стало быть, $DD_1 = \sqrt{3} \cdot A_2D_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot OD_1 = 3OD_1$. Получаем, что искомое отношение равно $(DD_1 - 2OD_1) : 2OD_1 = 1 : 2$.

Ответ: $1 : 2$

Решение:

$$\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0 \iff 2\cos^2 2x + \cos 2x + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = 0 \iff$$

$$\cos 2x\left(2 - 4\sin^2 x + 1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \iff \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}(4\sin^4 x - 3\sin^2 x - 1) = 0 \iff$$

$$\frac{\cos 2x(\sin^2 x - 1)(4\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x} = 0 \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi/2 + k\pi,\ \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6$.

Решение:

$$\log_2 x + \log_3 x \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6 \iff \frac{\log_x 6}{\log_x 2 \log_x 3} \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6 \iff$$

$$\log_2 3 \cdot \log_x 6 \cdot \left(\frac{\log_2 x \cdot \log_3 x}{\log_2 3} - 1\right) \leqslant 0 \iff \log_x 6 \cdot (\log_3^2 x - 1) \leqslant 0 \iff$$

$$\frac{(\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1)}{\log_6 x} \leqslant 0 \iff \begin{cases} \dfrac{(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x - 1} \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \in (0, 1/3] \cup (1, 3]$$

Ответ: $x \in (0, 1/3] \cup (1, 3]$

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK, можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC.

Решение: Из того, что четырёхугольник $AKML$ вписанный, следует, что углы MLC и MKA равны. Поскольку углы BCA и BAC также равны, получаем подобие треугольников BCL и CAK. Отсюда $BC/CA = CL/AK$. Из равенства площадей получаем $BC \cdot CL = CA \cdot AK$, то есть $BC/CA = AK/CL$. Стало быть, $CA = BC = 1$.

Ответ: 1

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3 + 2x - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2}\right)\left(\sqrt{a - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2}\right)\left(\sqrt{a - x^2} - \sqrt{3 + 2x - x^2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

Решение: Заметим, что $3 \pm 2x - x^2 = 2^2 - (x \mp 1)^2$. Стало быть, графики функций $\sqrt{3 + 2x - x^2}$ и $\sqrt{3 - 2x - x^2}$ — верхние половины окружностей радиуса 2 с центрами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ соответственно. График же функции $\sqrt{a - x^2}$ — верхняя половина окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(0, 0)$. Первые две полуокружности имеют одну общую точку — $(0, \sqrt{3})$. При этом ОДЗ x является пересечением отрезков $[-1, 1]$ и $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$. Соответственно, при $a < 1$ третья полуокружность первые две не пересекает и решение будет одно. При $1 \leqslant a \leqslant 5$

третья полуокружность пересекает первые две в точках с абсциссами из отрезка $[-1,1]$ и точки пересечения совпадают только при $a=3$. При $a>5$ третья полуокружность либо пересекает первые две в точках с абсциссами по модулю большими 1, либо не пересекает вообще. Стало быть, решение будет единственным при $a \in [0,1) \cup \{3\} \cup (5,+\infty)$.

Ответ: $a \in [0,1) \cup \{3\} \cup (5,+\infty)$

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB, что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB.

Решение: Сразу отметим, что, поскольку центр сферы, описанной около тетраэдра, лежит на AB, углы ACB и ADB — прямые. Далее, опустим перпендикуляры CK и CL на AB и BD соответственно. Тогда $DL = LB$, ибо $DC = CB$, следовательно, KL — серединный перпендикуляр к BD в плоскости ABD и, поскольку $\angle ADB = 90°$, точка K является серединой AB. Значит, $AC = BC$. Аналогично, $AD = BD$.

Итак, $AC = BC = AD = BD = CD$, $AB \perp CK$, $AB \perp DK$, $AK = BK = CK = DK$. Пусть E — точка, симметричная точке C относительно K. Тогда $AK \perp EK \perp DK$ и $AK = EK = DK$. Следовательно, треугольник ADE — равносторонний. При этом $AE \parallel CB$. Стало быть, искомый угол равен углу EAD и равен $60°$.

Ответ: $60°$