Найти все *a*, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x+(1-|a-2|)\sin 2x+(1-|2-a|)\cos x+(1-|a|)\sin x=0$$

имеет нечетное число решений на интервале $(-\pi;\pi)$.

Введем обозначения $|a|-1=u;\quad 1-|a-2|=v;\quad \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}=\sin\alpha;\quad \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=\cos\alpha$

$$u\cos 2x+v\sin 2x+v\cos x-u\sin x=0$$

$$\sin\alpha\cos 2x+\cos\alpha\sin 2x+\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x=0$$

$$\sin(2x+\alpha)+\cos(x+\alpha)=0$$

$$\sin(2x+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\alpha\right)=0$$

$$2\sin\frac{2x+\alpha+\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2}\cos\frac{2x+\alpha-\frac{\pi}{2}+x+\alpha}{2}=0$$

$$2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{3x+2\alpha-\frac{\pi}{2}}{2}=0$$

Решаем дальше…

1) $\cos\dfrac{3x+2\alpha-\frac{\pi}{2}}{2}=0$

$$\frac{3x+2\alpha-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

$$3x+2\alpha-\frac{\pi}{2}=\pi+2\pi n$$

$$3x+2\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$$

$$3x=-2\alpha+\frac{3\pi}{2}+2\pi n$$

$$x=-\frac{2\alpha}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$$

2) $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi k$$

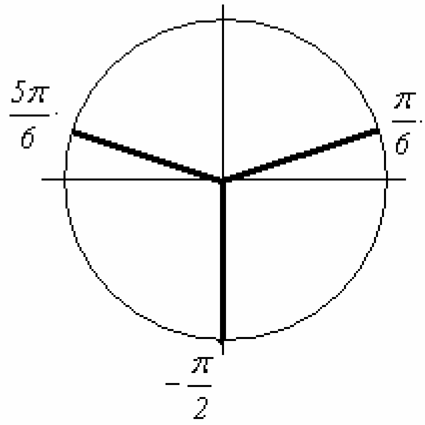
$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

Теперь самое главное в этой задаче. Нам надо, чтобы было нечетное число корней. Вторая серия решений дает одно решение $x=-\dfrac{\pi}{2}$. Первая серия будет давать 3 решения на периоде (это становится понятным, если посмотреть на слагаемое $\dfrac{2\pi n}{3}$.

Таким образом, нечетное число корней (а точнее – 3 корня) будет если одно из решений первой серии совпадает с $-\dfrac{\pi}{2}$ или попадает в точку π, т.е. не входит в рассматриваемый промежуток. Рассмотрим эти случаи.

1)



$$-\frac{2\alpha}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}; \quad \rightarrow \quad -\frac{2\alpha}{3}=-\frac{\pi}{3}; \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{\pi}{2};$$

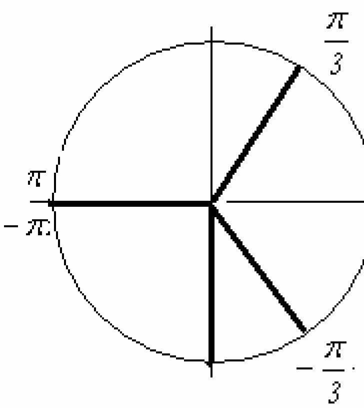
Тогда $v=0; \quad 1-|a-2|=0; \quad a=3;1$

Но если $a=1$, то и $u=0$, а это невозможно.

Если $a=3; \quad v=0; \quad u=2$

Таким образом, имеем 2 факта $a \neq 1$ и решение $a=3$

2)



$$-\frac{2\alpha}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}; \quad \rightarrow \quad -\frac{2\alpha}{3}=-\frac{\pi}{6}; \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{\pi}{4};$$

$tg\alpha=1; \quad u=v; \quad |a|-1=1-|a-2|;$

$|a|+|a-2|=2;$

$а) \quad a \leq 0; \quad -a-a+2=2; \quad \rightarrow \quad a=0$

$б) \quad 0<a \leq 2; \quad a-a+2=2; \quad \rightarrow \quad a \in (0;2]$

$в) \quad a>2; \quad a+a-2=2; \quad \rightarrow \quad a=2$

$a \in [0;2]$

Окончательно по двум случаям получаем: $a \in [0;1) \cup (1;2] \cup \{3\}$.