При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $[0;2\pi)$?

Преобразуем

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 2a^2 - 2a = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x - a^2 - a = 0$$

На участке $[0;2\pi)$ любое значение косинуса будет давать 2 значения угла кроме точек $x = 0$ и $x = \pi$, тогда значение угла будет единственным

Пусть $x = 0$

Получаем $2 - a^2 - a = 0 \quad \to \quad a = -2;1$

При $a = 1;-2 \quad \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \quad \to \quad \cos x = -2;1$ имеем единственное решение $x = 0$

Пусть $x = \pi$

Получаем $1 - 1 - a^2 - a = 0 \quad \to \quad a = 0;-1$

При $a = -1;0 \quad \cos^2 x + \cos x = 0 \quad \to \quad \cos x = -1;0$ имеем два решения $x = 0$ и $x = \pi$, значит эти значения параметра не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a = 1;-2$