Интернет-олимпиада по математике — 2010

Введите ответы на задания 1—30 в специальную форму на сайте.

1. Сколько решений имеет система $\begin{cases} y = \frac{x}{x+1}, \\ y = x+1\,? \end{cases}$

1 одно **2** два **3** три **4** четыре или больше **5** решений нет

2. До кризиса на 40% всех своих денег Билл купил акции фирмы А, каждая из которых в результате кризиса стала дешевле на 40%. На остальные 60% всех денег он купил акции В, которые стали дешевле на 60%. Все расчеты проводятся в рублях. На сколько процентов уменьшилось состояние Билла? Укажите остаток от деления этого натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

3. Значение выражения $\sqrt{\dfrac{x^3+y^3}{x+y} - xy}$ при $x = 2-\sqrt{5}$, $y = -2-\sqrt{5}$ равно

1 $2\sqrt{5}-4$ **2** $4+2\sqrt{5}$ **3** 4 **4** $2\sqrt{5}$ **5** $3\sqrt{2}$

4. Укажите наименьшее целочисленное решение неравенства $\log_2(12x) \geqslant 5$.

1 3 **2** 5 **3** 2 **4** 4 **5** 1

5. Сумма всех различных корней уравнения $x(x-3)(x-3)^2 = x(x-3)^4$ равна

1 7 **2** 6 **3** 3 **4** 9 **5** 5

6. Укажите наибольший корень уравнения $\sin x + \cos x = 0$ принадлежащий отрезку $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

1 $\dfrac{\pi}{4}$ **2** $\dfrac{3\pi}{4}$ **3** $\dfrac{5\pi}{4}$ **4** $\dfrac{7\pi}{4}$ **5** $\dfrac{\pi}{2}$

7. В классе 25 учеников, 17 из них изучают английский язык, 18 — французский, а 5 учеников не изучают ни одного иностранного языка. Сколько учеников изучают одновременно английский и французский языки?

1 9 **2** 10 **3** 14 **4** 15 **5** 11

8. Значение выражения $\dfrac{(\log_3 5)^2 - 3\log_3 5 \cdot \log_3 2 + 2(\log_3 2)^2}{\log_3 5 - \log_3 2}$ равно

1 $\log_3 \dfrac{5}{2}$ **2** $\log_3 \dfrac{4}{5}$ **3** $\log_3 \dfrac{2}{5}$ **4** $\log_3 \dfrac{4}{25}$ **5** $\log_3 \dfrac{5}{4}$

9. Найдите сумму всех различных корней уравнения $\sqrt{x} + \dfrac{8}{\sqrt{x}} = 6$.

1 $\sqrt{2}+2$ **2** 20 **3** 6 **4** 8 **5** Корней нет

10. Найдите больший корень уравнения $x(x+8)\left(3^{\sqrt{x}}-9\right)\left(\log_2 x - 2\right) = 0$.

1 4 **2** 2 **3** $\log_2 3$ **4** 8 **5** 9

11. Наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 8x + 12 - 10\sqrt{x^2 - 8x + 12}$ равно

$\boxed{1}$ -24 $\boxed{2}$ -25 $\boxed{3}$ -4 $\boxed{4}$ 0 $\boxed{5}$ -3

12. Все решения неравенства $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-x} \leqslant 1\dfrac{9}{16}$ образуют множество

$\boxed{1}$ $x \leqslant 2$ $\boxed{2}$ $x \leqslant -2$ $\boxed{3}$ $x \geqslant 2$ $\boxed{4}$ $x \geqslant -2$ $\boxed{5}$ $-2 \leqslant x \leqslant 2$

13. Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $(x-2)\Big(\big(9^x + 3^x\big)^2 - 24\big(9^x + 3^x\big) + 144\Big) = 0$, то

$\boxed{1}$ $S \in (-999;\ 0{,}5)$ $\boxed{2}$ $S \in [0{,}5;\ 1{,}5)$ $\boxed{3}$ $S \in [1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{4}$ $S \in [2{,}5;\ 3{,}5)$ $\boxed{5}$ $S \in [3{,}5;\ 999)$

14. Производная функции $f(x) = (x^2 + 4x + 5)\sin x$ в точке $x = 0$ равна

$\boxed{1}$ 4 $\boxed{2}$ 5 $\boxed{3}$ 0 $\boxed{4}$ 9 $\boxed{5}$ 10

15. Если число X равно большему корню уравнения $x^2 - \log_3\big(54^x\big) + \log_3 8 = 0$, то

$\boxed{1}$ $X \in (-999;\ 1{,}31)$ $\boxed{2}$ $X \in [1{,}31;\ 2{,}42)$ $\boxed{3}$ $X \in [2{,}42;\ 3{,}53)$ $\boxed{4}$ $X \in [3{,}53;\ 4{,}64)$
$\boxed{5}$ $X \in [4{,}64;\ 999)$

16. Число $\mathcal{P}$ равно наименьшему целочисленному значению параметра p, при котором уравнение $100^x + 10^{x+\log_{10} 28} + 209 = p$ имеет по крайней мере один корень. Найдите остаток от деления $\mathcal{P}$ на 5.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

17. Функцию $y = f(x)$, график которой симметричен графику функции $y = 3^{-5x}$ относительно прямой $y = x$, можно задать уравнением

$\boxed{1}$ $y = -\dfrac{1}{5}\log_3 x$ $\boxed{2}$ $y = -3\log_5 x$ $\boxed{3}$ $y = \dfrac{1}{3}\log_3(-x)$ $\boxed{4}$ $y = -\dfrac{1}{3}\log_5 x$ $\boxed{5}$ $y = -5\log_3(-x)$

18. Прямая, касающаяся графика функции $y = x^4 + x^3 - x + 1$ в точке с абсциссой $x = 1$, пересекает ось абсцисс в точке, абсцисса которой равна

$\boxed{1}$ $\dfrac{1}{3}$ $\boxed{2}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{3}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{2}{3}$ $\boxed{5}$ 0

19. Наименьшее значение функции $81^x - 3^{x+\log_3(256)} + 779$ равно целому числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

20. В начале первого года Билл вложил 8 у.е. в ПИФ $\mathcal{A}$, который приносит доход 50% в год и 72 у.е. в ПИФ $\mathcal{B}$, который приносит убыток 50% в год. Проценты начисляются в конце каждого года. Укажите наименьший номер года, за который сумма вкладов Билла возрастет.

$\boxed{1}$ четвертый $\boxed{2}$ шестой $\boxed{3}$ второй $\boxed{4}$ третий $\boxed{5}$ пятый

21. Сумма всех различных положительных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{(x-8)(\log_2 x - p)}{(x - \log_3 p)(x - 64)} = 0$ имеет ровно один корень равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

22. Все решения неравенства $\arcsin(3x-2) \leqslant \arcsin(2-3x)$ образуют промежуток, длина которого равна

$\boxed{1}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{2}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{3}$ $\frac{1}{5}$ $\boxed{4}$ $\frac{1}{6}$ $\boxed{5}$ $\frac{1}{7}$

23. Укажите количество точек с целочисленными координатами, которые принадлежат области определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+9x-14} - \sqrt{x^2-13x+42}}$

$\boxed{1}$ ни одной или одна $\boxed{2}$ две $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ пять или больше пяти

24. Если число $\mathcal{X}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $4\cos^2 2x \cos^2 3x \cos 4x = 0{,}5 \sin 6x \sin 8x$, то значение выражения $\pi\mathcal{X}^{-1}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

25. Основания трапеции равны 12 и 33, одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, в трапецию можно вписать окружность. Если число r равно радиусу этой окружности, то

$\boxed{1}$ $r \in (0;\ 7{,}8)$ $\boxed{2}$ $r \in [7{,}8;\ 8{,}3)$ $\boxed{3}$ $r \in [8{,}3;\ 8{,}6)$ $\boxed{4}$ $r \in [8{,}6;\ 8{,}9)$ $\boxed{5}$ $r \in [8{,}9;\ 987)$

26. Сумма 8 наименьших различных положительных чисел p, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sin\left(\pi\sqrt{\frac{1}{4}\left(y-x^2\right)}\right) = 0, \\ y = px \end{cases}$ имеет нечетное число решений, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

27. Максимально возможная величина площади прямоугольника, вписанного в полукруг радиуса 17 так, что все вершины прямоугольника находятся на границе полукруга, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

28. Сумма всех различных различных корней уравнения $4^x - (28-x)\cdot 2^x + 160 - 8x = 0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

29. Решите уравнение $2\log_{\left(18(x-1)^2(x-7)\right)}\left(x^2-4x+3\right) + \log_{\left(x^2-4x+3\right)}\left(18(x-1)^2(x-7)\right) = 3.$ Запишите в ответе число, равное остатку от деления на 5 целой части суммы всех различных корней.

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

30. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущена высота BH на гипотенузу AC. Отрезки AH и HC являются диаметрами окружностей, которые пересекают AB и BC в точках M и N соответственно. Меньший из отрезков AM или CN равен 4.

Тангенс одного из острых углов $\triangle ABC$ равен 3. Больший из указанных отрезков равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Задания С1—С5

Ответы и решения задач С1—С5 нужно ввести в файл «Математика (бланк).doc».

1. Необходимо поставить один на другой три кубика так, чтобы их общая высота была равна 186 см, а суммарный вес был наименьшим возможным. Первый кубик должен быть изготовлен из пластмассы, каждый куб.см. которой весит 2 грамма. Второй кубик должен быть изготовлен из керамики, каждый куб.см. которой весит 4,5 грамма. Третий кубик должен быть изготовлен из металла, каждый куб.см. которого весит 12,5 грамма. Найдите длину ребра каждого из кубиков.

2. Найдите все значения параметра p, при которых графики функций $y = \dfrac{px+p+4}{x^2+2x}$ и $y = \dfrac{6x-2p}{x^2+x-2}$ имеют единственную общую точку.

3. Решите уравнение $\dfrac{x^4 - 14x^3 + (2p+66)x^2 - (14p+116)x}{p^2+18p+56} = -1.$

4. Найдите все значения параметра p, при которых найдется не менее двух различных значений параметра q таких, что система $\begin{cases} (p-4)x + (p^2-7p+12)y = q^2 - 6q + 5, \\ (p-1)x + 8y = 4pq, \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

5. Лодка находится на левом берегу реки, ширина которой равна 72 м. Скорость течения реки равна 5 м/сек, скорость лодки в неподвижной воде равна 3 м/сек. Требуется перевезти пассажира на правый берег и вернуться обратно. Найдите наименьшее возможное расстояние между точкой отправления и точкой, в которую вернется лодка на левом берегу.