Вниманию проверяющих!
Оцениванию подлежат только правильно решенные задачи или задачи, содержащие идеи, ведущие к правильному решению.
Отдельные верные рассуждения, не приводящие к решению не оцениваются.

1. Лариса, Вера и Саша собирали грибы. Вера собрала грибов на 40% больше, чем Саша, но на 30% меньше, чем Лариса. На сколько процентов Саша собрал грибов меньше, чем Лариса?

Ответ: на 50%.

Решение. Пусть Саша собрал x грибов, а Лариса y грибов. Тогда Вера собрала $1{,}4x = 0{,}7y$ грибов. Отсюда $x = 0{,}5y$, т. е. Сашины грибы составляют 50% от Ларисиных.

Оценивание. Верное решение — 10 б.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4^x-3^x}{x^2+x+1}}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{4^x-3^x}}=\sqrt{4x-x^2}.$$

Ответ: 2.

Решение. В левой части уравнения записана (при допустимых значениях x) сумма положительных взаимно обратных чисел. Такая сумма не меньше 2. Правая часть не больше 2:

$$\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}\leqslant 2.$$

Поэтому равенство возможно только, когда обе части равны 2.

$$\sqrt{4-(x-2)^2}=2 \iff x=2.$$

Подстановка $x = 2$ в левую часть уравнения также даёт число 2. Значит, 2 — единственный корень уравнения.

Оценивание. Верное решение — 11 б. Если обнаружено, что обе части равны 2, а правая равна 2 только при $x = 2$, но не проверено, что и левая часть равна 2 при $x = 2$, то 8 б.

3. Найдите объём четырёугольной пирамиды $MABCD$, если известны координаты её вершин: $A(-4; 0; 1), B(-2; 2; 1), C(4; 0; 1), D(1; -3; 1), M(4; 4; 4)$.

Ответ: 20.

Первое решение. Точки A, B, C, D лежат в плоскости $z = 1$. Высота пирамиды равна расстоянию от точки M до этой плоскости $h = 4 - 1 = 3$. Площадь основания пирамиды проще всего найти, сложив площади треугольников ABC и ADC. У этих треугольников общее основание $AC = 8$, а высоты соответственно равны 2 и 3. Поэтому $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (2 + 3) = 20$, а $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = 20$.

Оценивание. Верное решение — 11 б. За арифметические ошибки минус 2 б.

Второе решение. Возможно решение с использованием смешанного произведения и подсчетом соответствующих определителей. За правильно выписанные определители – 5 баллов, за правильно выполненный подсчет - 11.

4. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$(\cos x + \sin x)^2 (\cos^4 x + \sin^4 x) \geqslant 1.$$

Доказательство. Поскольку

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 1 + \sin 2x,$$

а

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x,$$

уместна замена $t = \sin 2x$. Из условия $0 < x < \frac{\pi}{2}$ следует, что $0 < t \leqslant 1$. Относительно новой переменной получаем неравенство $(1 + t)(1 - \frac{1}{2}t^2) \geqslant 1$, которое преобразуется к виду $t(t - 1)(t + 2) \leqslant 0$. На промежутке $(0; 1]$ это неравенство выполняется.

Оценивание. Верное решение — 12 б.

5. На координатной плоскости Oxy постройте фигуру, ограниченную линиями $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ и

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5 - x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}} \right),$$

и найдите её площадь.

Ответ: фигура изображена на рис. 1; её площадь равна $\dfrac{4\pi}{3}+4-\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим $t=\sqrt{4-x^2}$. Тогда $5-x^2=t^2+1$ и

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2+1-2t}\right)=\frac{1}{2}(|t+1|+|t-1|)=\begin{cases} t, & \text{если } t\geqslant 1,\\ 1, & \text{если } 0\leqslant t<1.\end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$y=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & \text{если } \sqrt{4-x^2}\geqslant 1,\\ 1, & \text{если } \sqrt{4-x^2}<1.\end{cases}$$

График функции — объединение отрезков EA, BC и дуги окружности AB (рис. 1). Фигуру, площадь которой нужно найти, можно представить в виде объединения сектора круга AOB радиусом 2 и углом 120° и двух равных прямоугольных трапеций. Площадь сектора равна $\frac{1}{3}\cdot 4\pi$. Основания трапеции $OD=2$, $BC=2-\sqrt{3}$, высота трапеции $DC=1$, а её площадь $S_{ODBC}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Оценивание. Верное решение — 13 б. Если фигура построена, но площадь её не найдена, ставить 8 б.

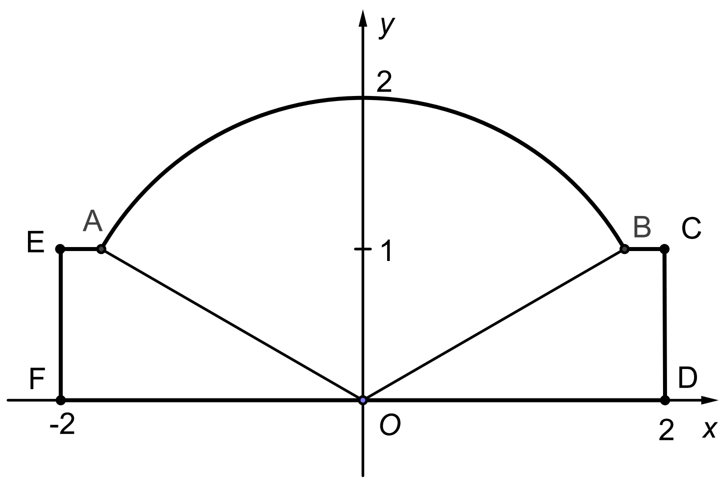

Рис. 1

6. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке E. Найдите BD, если $AB=7$, $BC=9$, $BE=13$.

Ответ: 5.

Решение. Положим $BD=x$, $ED=y$, $AD=CD=z$, $\angle ADB=\alpha$.

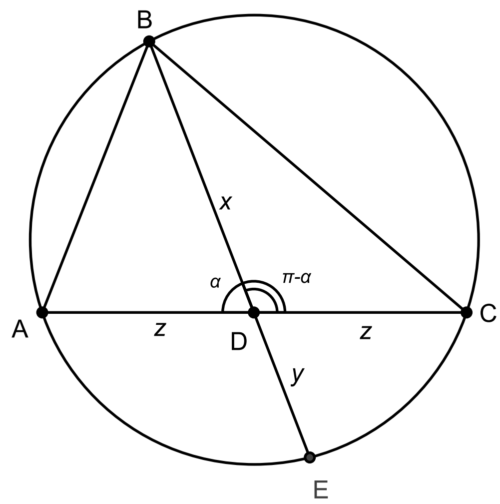

Рис. 2

По свойству пересекающихся хорд, $AD \cdot CD = BD \cdot ED$, т. е. $xy = z^2$. По теореме косинусов, применённой к треугольникам ABD и BDC,

$$AB^2 = 49 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\alpha; \quad BC^2 = 81 = x^2 + z^2 + 2xz\cos\alpha.$$

Складывая эти равенства, получим $x^2+z^2 = 65$. Кроме того, $BE = x+y = 13$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = z^2; \\ x^2 + z^2 = 65; \\ x + y = 13. \end{cases}$$

Выражая из третьего уравнения y через x, а из второго z^2 через x^2, приходим к уравнению $x(13 - x) = 65 - x^2$, откуда $13x = 65$ и $x = 5$.

Оценивание. Верное решение — 14 б.

7. Найдите все простые числа p, для которых существуют такие натуральные числа m и n, что $p^m - 1 = n^3$.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$p^m = (n+1)(n^2 - n + 1).$$

Число $n+1$ является делителем степени простого числа p и больше 1, поэтому $n + 1$ кратно p. Заметим также, что $n^2 - n + 1 = p^k$, где $0 \leqslant k \leqslant m$.

Если $k = 0$, то $n = 1$, $p = 2$, $m = 1$.

Если $k > 0$, то число p является делителем чисел $n^2 - n + 1$ и $n + 1$. Поэтому p также делит число $3 = (n^2 - n + 1) - (n + 1)(n - 2)$. Значит, $p = 3$. При этом $m = n = 2$.

Оценивание. Верное решение — 14 б. Если подбором найдено одно из двух решений — 2 б., если оба — 3 б. (и при этом не доказано, что нет других решений).

8. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 часов расстояние между ними было 20 км, в 9 ч 35 мин — 15 км, в 9 ч 55 мин — 13 км. Каким будет минимальное расстояние между пароходами?

Ответ: 12.

Решение. Можно считать, что радиус-векторы пароходов

$$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{v_1} t, \quad \boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{v_2} t + \boldsymbol{r_0},$$

где t — время (в часах), прошедшее после 9.00, $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ — векторы скоростей, $\boldsymbol{r_0}$ — вектор, направленный от первого парохода ко второму в 9.00.

Пусть $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}$. Тогда квадрат расстояния между пароходами в момент времени t равен

$$d^2 = |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^2 = |\boldsymbol{b}t + \boldsymbol{r_0}|^2 = At^2 + Bt + 400,$$

где $A = \boldsymbol{b}^2, B = 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{r_0}$. Условие задачи даёт систему двух линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} \left(\frac{7}{12}\right)^2 A + \left(\frac{7}{12}\right) B + 400 = 225, \\ \left(\frac{11}{12}\right)^2 A + \left(\frac{11}{12}\right) B + 400 = 169. \end{cases}$$

Из этой системы находим $A = 144, B = -384$. Отсюда (после выделения полного квадрата)

$$d^2 = (12t - 16)^2 + 144.$$

Значит, наименьшее расстояние между пароходами достигается при $t = 4/3$, т. е. в 10 ч 20 мин и равно 12 км.

Оценивание. Верное решение — 15 б. Если задача сведена к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, но последняя не решена — 10 б. Если верно найдено расстояние между пароходами как функция времени, но не найдено её наименьшее значение — 13 б.