

ЮЖНО-УРАЛЬСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА

2011 год

1. Лариса, Вера и Саша собирали грибы. Вера собрала грибов на 40% больше, чем Саша, но на 30% меньше, чем Лариса. На сколько процентов Саша собрал грибов меньше, чем Лариса?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4^x - 3^x}{x^2 + x + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{4^x - 3^x}} = \sqrt{4x - x^2}.$$

3. Найдите объём четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной в точке M , если известны координаты точек A, B, C, D и M :

$$A(-4; 0; 1), B(-2; 2; 1), C(4; 0; 1), D(1; -3; 1), M(4; 4; 4).$$

4. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$(\cos x + \sin x)^2 (\cos^4 x + \sin^4 x) \geq 1.$$

5. На координатной плоскости Oxy постройте фигуру, ограниченную линиями $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ и

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5 - x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}} \right),$$

и найдите её площадь.

6. В треугольнике ABC продолжение медианы BD пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке E . Найдите BD , если $AB = 7$, $BC = 9$, $BE = 13$.

7. Найдите все простые числа p , для которых существуют такие целые положительные числа m и n , что $p^m - 1 = n^3$.

8. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 часов расстояние между ними было 20 км, в 9 ч 35 мин — 15 км, в 9 ч 55 мин — 13 км. Каким будет минимальное расстояние между пароходами?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!