XXXIII Турнир имени М. В. Ломоносова 26 сентября 2010 года

Конкурс по математике. Ответы и решения

(предварительная версия от 13.10.2010)

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача; решать задачи более старших классов также разрешается.

1. (6–7) Можно ли заменить буквы цифрами в ребусе

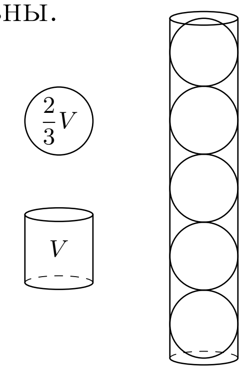
$$\textsf{ШЕ}\cdot\textsf{СТЬ}+1=\textsf{СЕ}\cdot\textsf{МЬ}$$

так, чтобы получилось верное равенство (разные буквы нужно заменять разными цифрами, одинаковые буквы — одинаковыми цифрами)?

Ответ: нет.

Решение. И число ШЕ · СТЬ, и число СЕ · МЬ оканчиваются на одну и ту же цифру — последнюю цифру числа Е · Ь. Поэтому левая и правая части равенства оканчиваются на разные цифры и не могут быть равны.

2. (6–7) Еще Архимед знал, что шар занимает ровно $^2/_3$ объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра). В цилиндрической упаковке находятся 5 стоящих друг на друге шаров. Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.



Ответ: 1 : 2.

Решение. Разделим упаковку на 5 цилиндров, в каждый из которых вписан шар. В каждом из цилиндров отношение пустого места к занятому есть $\frac{1-{}^2/_3}{{}^2/_3}=\frac{1}{2}$. Значит, и во всей упаковке это отношение такое же, 1 : 2.

3. (6–8) Боря и Миша едут в поезде и считают столбы за окном: «один, два, ...». Боря не выговаривает букву «Р», поэтому при счете он пропускает числа, в названии которых есть буква «Р», а называет сразу следующее число без буквы «Р». Миша не выговаривает букву «Ш», поэтому пропускает числа с буквой «Ш». У Бори последний столб получил номер «сто». Какой номер этот столб получил у Миши?

Ответ: «восемьдесят один».

Решение. Боря выговаривает числа, в записи которых нет цифр 3 и 4 — среди первых ста чисел таких $(10-2)^2=64$ (и для цифры десятков, и для цифры единиц есть по 8 вариантов), т. е. на самом деле столбов было 64. Миша же пропускает числа, в записи которых присутствует цифра 6. Поэтому, досчитав до «59», он пропустит 6 чисел — т. е. ему останется посчитать еще $64-(59-6)=11$ столбов. Отсчитывая эти 11 столбов, Миша пропустит все числа от 60 до 69, а также число 76. В результате, последний столб получит у него номер $69+11+1=81$.

Комментарий. Боря, фактически, считает столбы в восьмеричной системе счисления с цифрами 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9; а Миша — в девятеричной с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Соответственно, чтобы решить задачу, надо перевести число «100» из восьмеричной системы в девятеричную — получится «71», а потом записать его «Мишиными цифрами» (пропуская шестерку) — получится «81».

4. (6–8) Покажите, как разрезать фигуру на рис. 1 на три равные части и сложить из этих частей правильный шестиугольник, изображенный на рис. 2. Оставлять дырки и накладывать части друг на друга нельзя.

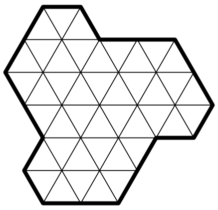


Рис. 1

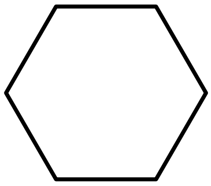
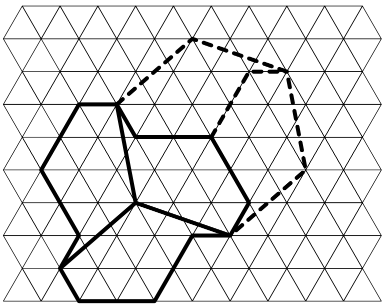
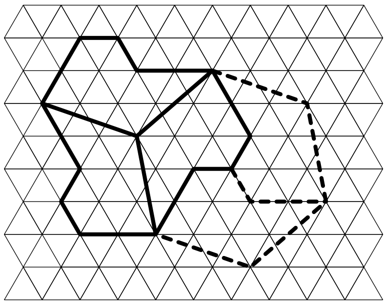


Рис. 2

Решение. Сосчитав число треугольничков в фигуре, находим, что сторона шестиугольника больше 2, но меньше 3. Попытавшись провести отрезки такой длины из центра фигуры, нетрудно найти одно из двух решений (см. рис.).

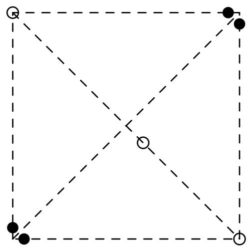


Решение 1



Решение 2

5. (8–11) В саду растут яблони и груши — всего 7 деревьев (деревья обоих видов присутствуют). Ближе всех к каждому дереву растет дерево того же вида и дальше всех от каждого дерева растет дерево того же вида. Приведите пример того, как могут располагаться деревья в саду.

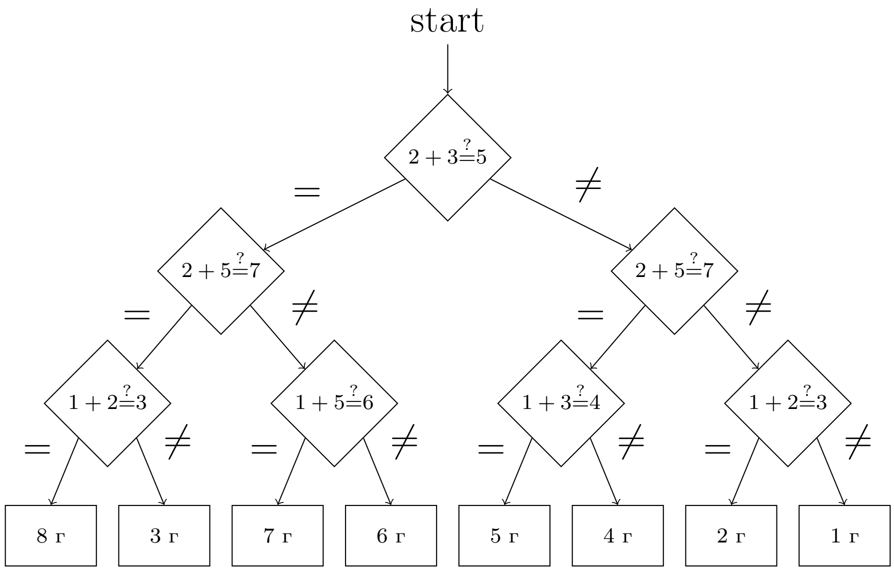


Решение. Посадим сначала по яблоне в двух противоположных вершинах квадрата и в его центре, а также по груше в двух других вершинах квадрата. После чего заменим каждую грушу на пару близкорастущих груш — теперь условие выполняется для всех деревьев, кроме центральной яблони. Но подвинув ее немного вдоль «яблоневой» диагонали, можно добиться, чтобы условие выполнялось и для нее — см. рис. (подвинуть нужно так, чтобы, с одной стороны, нижняя яблоня стала к ней ближе, чем груши, а с другой — она осталась ближайшим деревом к верхней яблоне).

Комментарий. Имелось в виду, что если ближайших к данному дереву (или самых дальних от данного дерева) несколько, то условие должно выполнятся для *каждого* из них.

6. (8–11) Было 8 грузиков массами 1, 2, …, 8 г. Один из них потерялся, а остальные выложили в ряд по возрастанию массы. Есть весы с лампочкой, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы грузиков одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какой именно грузик потерялся?

Решение. Одна из возможных последовательностей взвешиваний приведена на схеме (в описании взвешиваний используются номера грузиков — от 1 до 7; грузик номер x может иметь массу x г или $x+1$ г).



7. (9–11) Существуют ли такие целые положительные x и y, что

$$x^4 - y^4 = x^3 + y^3?$$

Решение. После деления на $x+y$ получаем $(x-y)(x^2+y^2) = x^2 - xy + y^2$. Но левая часть не меньше x^2+y^2 (так как из условия видно, что $x > y$), а правая меньше.

8. (9–11) На клетчатой бумаге проведена диагональ прямоугольника 1×4. Покажите, как, пользуясь только линейкой без делений, разделить этот отрезок на три равные части.

Решение. Первый вариант: соединить каждую из двух других вершин прямоугольника с серединой соответствующей длинной стороны (рис. 3). Второй вариант: провести из каждого узла стороны DC диагональ клетки (рис. 4). В обоих случаях правильность построения следует из теоремы Фалеса: в первом решении параллельные прямые AN, MC и BC делят на три равные части отрезок DX — а значит, и диагональ DB, во втором решении — три параллельных прямых делят на три равные части отрезок DY.

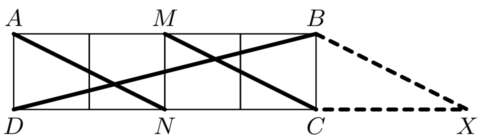


Рис. 3

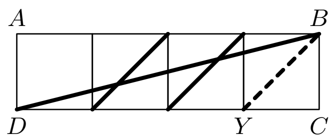


Рис. 4