Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Еб «Биология и биотехнология»

Математика

Задача №1. 6 баллов

Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/ч и пришел за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

Задача №2. 7 баллов

Вычислите $tg(5\pi/4 + 2\acute{\alpha})$, если $\cos \acute{\alpha} = 3/5$ и $-3\pi/2<\acute{\alpha}<0$.

Задача №3. 8 баллов

Решите неравенство $\log_{(8x^2)}(-4x^3) \geq 1$.

Задача №4. 13 баллов

Один из учеников Алик, Боря, Витя или Гоша разбил в классе стекло. На вопрос, кто это сделал, они дали следующие ответы:
Алик: стекло разбил Витя,
Боря: ни Витя, ни Алик этого не делали,
Витя: Боря стекла не разбивал,
Гоша: это сделал Боря.
Можно ли по этим ответам однозначно определить имя ученика, если солгать мог только он сам, а также не более, чем один из остальных трех школьников?

Задача №5. 16 баллов

Стороны *AD* и *BC* четырехугольника *ABCD* параллельны. Биссектрисы его углов *A* и *D* пересекаются в точке *M*, лежащей на стороне *BC*, а биссектрисы углов *B* и *C* – в точке *N*, лежащей на стороне *AD*. Найдите длины всех сторон четырехугольника *ABCD*, если *AM*=6 и *BN*=4.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Еп «Почвоведение, биосфера и проблемы земли»

Математика

Задача №1. 6 баллов

Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/ч и пришел за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

Задача №2. 7 баллов

Вычислите $tg(5\pi/4 + 2\acute{\alpha})$, если $\cos \acute{\alpha} = 3/5$ и $- 3\pi/2<\acute{\alpha}<0$.

Задача №3. 8 баллов

Решите неравенство $\log_{(8x^2)}(- 4x^3) \geq 1$.

Задача №4. 13 баллов

Один из учеников Алик, Боря, Витя или Гоша разбил в классе стекло. На вопрос, кто это сделал, они дали следующие ответы:
Алик: стекло разбил Витя,
Боря: ни Витя, ни Алик этого не делали,
Витя: Боря стекла не разбивал,
Гоша: это сделал Боря.
Можно ли по этим ответам однозначно определить имя ученика, если солгать мог только он сам, а также не более, чем один из остальных трех школьников?

Задача №5. 16 баллов

Стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ параллельны. Биссектрисы его углов A и D пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC, а биссектрисы углов B и C – в точке N, лежащей на стороне AD. Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$, если AM=6 и BN=4.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Еф «Теоретическая и экспериментальная физика и астрономия»

Математика

Задача 1.

Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos x \cdot \cos 2x + \sin x = 0.$$

Задача 2.

Решить неравенство

$$2^{2x+3} + 5^{\frac{2x+1}{2}} > 5^{\frac{2x+3}{2}} - 4^{\frac{2x+1}{2}}.$$

Задача 3.

Площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна 20, а острый угол трапеции равен 30°. Найти боковую сторону трапеции.

Задача 4.

Найти все значения b, при которых неравенство

$$\log_3(x^2 + 2bx + 1) > -1$$

выполняется для всех x из промежутка $x>0$.

Задача 5.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ площадь сечения, проходящего через боковые ребра SB и SD, в три раза больше площади основания пирамиды. Боковое ребро равно $\sqrt{37}$. Найти площадь боковой грани пирамиды.

Федеральное агентство по образованию Российской федерации
Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее» -2009
Модельный вариант задания по математике
Профиль Ех «Химия и химические технологии»

1. Решить уравнения:

а) $0{,}6^{x^2+2x}=1$, **б)** $\log_{0,7}(5-3x)=0$,

в) $\sqrt{2x-3}=x-3$, **г)** $\sin 3x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Решить неравенства:

а) $(x-2)\cdot(4x-1)\le 6-3x$, **б)** $\log_3(3x-2)<2$,
в) $4^{2x+1}+2^{2x}>4$, **г)** $|5-2x|\ge 3$.

3. Решить уравнение: $\sqrt{x-2}+|x-5|=3$.

4. Решить неравенство: $2^{\frac{1-x}{x}}<2^{\frac{1-2x}{2x}}+1$.

5. Прямоугольный треугольник **ABC** имеет периметр 54 см, длина катета **AC** больше 10 см. Окружность радиуса 6 см, центр которой лежит на катете **BC**, касается прямых **AB** и **AC**. Найти площадь треугольника.

6. Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(2-|x-1|\right)>\log_{\sqrt{10}}\left(2x-x^2\right).$$

7. Найти, при каких значениях параметра a и при каких x числа

$$a,\quad \sin x-\cos x,\quad 1+\cos 2x$$

составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
академическое соревнование:
Российская открытая академическая олимпиада «Профессор Жуковский»

Модельный вариант

Профиль Т.1 «Аэрокосмическая техника и интеллектуальные системы»

Задача 1М.

Решите неравенство $2\cos x(\cos x - \sqrt{8} \cdot tgx) < 5$.

Задача 2М.

В трапецию ABCD, боковая сторона AB которой имеет длину 8 см и перпендикулярна основанию, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы, чтобы одна из его сторон лежала на большем основании трапеции. Вычислите площадь этого прямоугольника, если основания трапеции равны 6 и 10 см.

Задача 3М.

В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что большая касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда большая шестеренка не доходит на 20 зубцов до полных четырех оборотов, вторая и третья делают, соответственно, 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

Задача 4М.

Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством $2|x| + |y + 2x + 1| \le 5$.

Задача 5М.

Решите уравнение $\sqrt{12 - \dfrac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \dfrac{12}{x^2}} = x^2$.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Т.1 «Аэрокосмическая техника и интеллектуальные системы»

Задача 1М. 10 баллов

Решите неравенство $2\cos x(\cos x - \sqrt{8}\cdot tgx) < 5$.

Задача 2М. 10 баллов

В трапецию ABCD, боковая сторона AB которой имеет длину 8 см и перпендикулярна основанию, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы, чтобы одна из его сторон лежала на большем основании трапеции. Вычислите площадь этого прямоугольника, если основания трапеции равны 6 и 10 см.

Задача 3М. 10 баллов

В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что большая касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда большая шестеренка не доходит на 20 зубцов до полных четырех оборотов, вторая и третья делают, соответственно, 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

Задача 4М. 12 баллов

Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством $2|x| + |y + 2x + 1| \le 5$.

Задача 5М. 8 баллов

Решите уравнение $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = x^2$.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
академическое соревнование:
Российская открытая академическая олимпиада «Профессор Жуковский»

Модельный вариант

Профиль Т.2 «Машиностроение, новые материалы и энергетические системы будущего»

Задача 1М.

Около шара радиуса R опишите конус наименьшего объема.

Задача 2М.

Найдите все значения параметра m, при котором уравнение $\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m^2+m-20=0$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2\pi]$.

Задача 3М.

При каких a уравнение $\dfrac{x^2-ax+1}{x+3}=0$ имеет единственное решение?

Задача 3М*.

Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3-\log_x 9}+4=0.$$

Задача 4М.

Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^2, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z\ge 0$.

Задача 5М.

Периметр прямоугольного треугольника ABC (угол C прямой) равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CK равна 7 см. Найдите длину гипотенузы.

Примечание.

В варианте будет предложена задача 3М или задача 3М*.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Т.2 «Машиностроение, новые материалы и энергетические системы будущего»

Задача 1М. 8 баллов

Около шара радиуса R опишите конус наименьшего объема.

Задача 2М. 12 баллов

Найдите все значения параметра m, при котором уравнение $\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m^2+m-20=0$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2\pi]$.

Задача 3М. 12 баллов

При каких a уравнение $\dfrac{x^2-ax+1}{x+3}=0$ имеет единственное решение?

Задача 3М*. 12 баллов

Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3-\log_x 9}+4=0.$$

Задача 4М. 10 баллов

Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^2, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z\geq 0$.

Задача 5М. 8 баллов

Периметр прямоугольного треугольника ABC (угол C прямой) равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CK равна 7 см. Найдите длину гипотенузы.

Примечание.

В варианте будет предложена задача 3М или задача 3М*.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Т.3 «Прикладная математика, техническая физика и информационные технологии»

Задача 1М. 12 баллов

Русла двух рек (в пределах некоторой области) представляют собой параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить эти реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки нужно его провести?

Задача 2М. 12 баллов

Решите систему $\begin{cases} tgx + 2tg2x + 2008ctg3x + 4ctg4x = 0; \\ \arccos\left(\frac{4}{3}x - 1\right) \geq 0. \end{cases}$

Задача 3М. 8 баллов

Решить неравенство $\left|x^2 - 2x - 3\right| < \left|x^2 - x + 4\right|$.

Задача 3М*. 8 баллов

Решите неравенство

$$2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5.$$

Задача 4М. 10 баллов

Фигура ограничена линиями $y = (x+3)^2, y = 0, x = 0.$ Под каким углом к оси ox надо провести прямые через точку $(0;9)$, чтобы они разбивали фигуру на три равновеликие части?

Задача 5М. 8 баллов

Точка М лежит внутри равностороннего треугольника АВС. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что $AM = BM = 2\,см,\ CM = 1\ см$.

Примечание.

В варианте будет предложена задача 3М или задача 3М*.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Т.4 «Менеджмент высоких технологий»

Задача 1М. 8 баллов

Собака, находясь в точке А, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от собаки. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы – 1 м. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки А собака догонит лисицу?

Задача 2М. 10 баллов

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 5 \\ x^3 - x^2 y - xy^2 + y^3 = 6. \end{cases}$

Задача 3М. 12 баллов

Из всех решений $(x; y)$ уравнения $x^3 y - x^2 + 4xy + 6y - 2x = 3$ выбрать те, для которых y принимает а) наименьшее значение; б) наибольшее значение.

Задача 4М. 12 баллов

На координатной плоскости даны две параболы $y = 8 - 3x - 2x^2$ и $y = 2 + 9x - 2x^2$. К этим параболам проведена общая касательная l. Найдите площадь фигуры, ограниченной этими параболами и прямой l.

Задача 5М. 8 баллов

Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0:2)$. Найдите четвертую вершину D, угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ и площадь параллелограмма.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Т.5 «Приборостроение, биоинженерия и экология техносферы»

Задача 1М. 12 баллов

Решить систему уравнений $\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3, \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1, \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$

Задача 2М. 12 баллов

Решите уравнение $20\cos^2 x = 5 + \sin x + \sqrt{3}\cos x$

Задача 3М. 8 баллов

В какой точке кривой $y = x^2 - 5x + 6$ следует провести касательную, чтобы она проходила через точку М (1;1)?

Задача 3М*. 8 баллов

Решите неравенство $9\log_{(x-3)^4} 16 \le 6 - \log(x-3)^2$.

Задача 4М. 8 баллов

В треугольнике ABC проведены медианы AD и CE. Известно, что $AD = 5, \angle DAC = \frac{\pi}{8}, \angle ACE = \frac{\pi}{4}$. Определить площадь треугольника ABC.

Задача 5М. 10 баллов

В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция, основания которой имеют длины 4 см и 6 см. Диагональ боковой грани, проходящей через большую боковую сторону трапеции, равна 4 см. Найдите наибольшую величину объема призмы.

Примечание.

В варианте будет предложена задача 3М или задача 3М*.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
академическое соревнование:
Российская открытая академическая олимпиада «Профессор Жуковский»

Модельный вариант

Профиль Т.6 «Механика, мехатроника и проектирование современной техники»

Задача 1М.

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{x}-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{2}{x}}$.

Задача 2М.

Решите уравнение $2(\sin^3 x+\cos^3 x)=3\sin 2x(\sin x+\cos x)$.

Задача 3М.

При каждом значении параметра a решить уравнение $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=a.$

Задача 3М*.

Решите неравенство $\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

Задача 4М.

На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке D. Найти отношение площадей треугольников ABC и BCD, если известно, что $AC=15, BC=20$ и $\angle ABC=\angle ACD$.

Задача 5М.

В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен 8.

Примечание.

В варианте будет предложена задача 3М или задача 3М*.

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
Научно-образовательное соревнование:
Российская научно-образовательная олимпиада программы «Шаг в будущее»

Модельный вариант

Профиль Т.6 «Механика, мехатроника и проектирование современной техники»

Задача 1М. 12 баллов

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{x}-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{2}{x}}$.

Задача 2М. 8 баллов

Решите уравнение $2(\sin^3 x+\cos^3 x)=3\sin 2x(\sin x+\cos x)$.

Задача 3М. 12 баллов

При каждом значении параметра a решить уравнение $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=a$.

Задача 3М*. 12 баллов

Решите неравенство $\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

Задача 4М. 8 баллов

На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке D. Найти отношение площадей треугольников ABC и BCD, если известно, что $AC=15, BC=20$ и $\angle ABC=\angle ACD$.

Задача 5М. 10 баллов

В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен 8.

Примечание.

В варианте будет предложена задача 3М или задача 3М*.

Липецкий государственный технический университет

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
академическое соревнование:
Российская открытая академическая олимпиада «Профессор Жуковский»
(заочная форма)

Модельный вариант

МАТЕМАТИКА

1. Два каменщика, из которых второй начинает работать на 3 дня позже первого, могут выстроить стену за 14 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то для её выполнения первому потребовалось бы на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выстроить такую стену?

2. Решить неравенство: $7+2x \geq 2\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+9}.$

3. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} xy+2x-3y+2=0 \\ 2x^2y-3xy^2-12x+18y=16 \end{cases}$$

4. Решить уравнение: $3^{\sin x}=4-\cos^2\dfrac{4x}{3}$

5. Решить уравнение: $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$

6. Найти наибольшее значение площади равнобедренного треугольника OAB с основанием OB, если O – начало координат, B – точка на оси Ox, A – точка на графике функции: $y=\dfrac{8}{x}+27x\cdot e^{2-3x},\ 0{,}3\leq x\leq 1{,}4$.

7. В треугольнике ABC площадью 132 и с периметром 66 сторона AC равна 30. Внутри треугольника ABC взята точка D, удалённая на расстояние 2 от прямой AB и на расстояние 3 от прямой BC. Найти угол ABC и расстояние от D до центра вписанной окружности треугольника ABC.

8. На диагональ куба, соединяющую две его вершины, не лежащие в одной грани, провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделят диагональ?

9. Найти все значения **а**, при каждом из которых уравнение $4x - \left|3x - |x+a|\right| = 9|x-1|$ имеет хотя бы один корень.

10. Даны векторы $\overline{a}(3;-2), \overline{b}(6;1), \overline{c}(81;6)$. Если векторы $\left(\overline{a} + k\overline{b}\right)$ и $\overline{c}$ коллинеарны, то k равно?

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
академическое соревнование:
Российская открытая академическая олимпиада «Профессор Жуковский»
(заочная форма)

Модельный вариант

МАТЕМАТИКА

Задача 1М.

Доказать, что при всех натуральных n и x таких, что $|x| < 1$

$$2^n \geq (x+1)^n + (1-x)^n$$

Задача 2М.

Найти все целые решения уравнения $2008x^2 = 2009y^3$.

Задача 3М.

Даны пирамиды S_1ABCD и S_2ABCD, причем первая лежит внутри второй. Верно ли, что сумма ребер первой пирамиды всегда меньше, чем сумма ребер второй? Ответ обосновать.

Задача 4М.

Решить уравнение $2\sqrt{2}(\cos^3 x * \sin 3x + \sin^3 x * \cos 3x) = 3(\cos^3 x * \sin 3x - \sin^3 x * \cos 3x)$

Задача 5М.

Решить уравнение $\log_3(7-x) + \log_{1/9}(49+x) = 0$

Всероссийская олимпиада школьников «Шаг в будущее»
академическое соревнование:
Российская открытая академическая олимпиада «Профессор Жуковский»
(заочная форма)

Модельный вариант

МАТЕМАТИКА

№ 1. Костюм (пиджак и брюки) стоит 5400 рублей, причём пиджак стоит на 25 % дороже, чем брюки. Сколько стоит пиджак?

№ 2. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2 + x = 7$.

№ 3. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax + 9y = 18 - a \\ x + 3a = 5 \end{cases}$ не имеет решений?

№ 4. Если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 5$, то $\sin 2\alpha = \dots$

№ 5. Решить неравенство $8^{\sqrt{x+6}} > (0,5)^{4-x}$. В ответ записать количество целых решений.

№ 6. Найти длину интервала множества значений функции $f(x) = \dfrac{4x^2 - 7x + 2}{x^3}$ на промежутке $1/3 \le x \le 2$.

№ 7. При каком значении параметра a определённый интеграл $\int\limits_a^{a+1} \sqrt{25 - x^2}\,dx$ принимает максимальное значение?

№ 8. Диагонали трапеции равны 32 и 24. Средняя линия равна 20. Найти площадь трапеции.

№ 9. Развёртка боковой поверхности конуса даёт сектор площади 80π и угловой меры $1,6\pi$ радиан. Пусть V – объём конуса, тогда $V/\pi = \dots$

№ 10. В треугольнике OAB на стороне AB взята точка C, для которой $AC : CB = 3:1$. Найти в векторном равенстве $\overline{OC} = x \cdot \overline{OA} + y \cdot \overline{OB}$ коэффициенты x, y.

Соревнование молодых исследователей программы “Шаг в будущее”
Всероссийская олимпиада школьников “Шаг в будущее”

Академическое соревнование, первый (заочный) тур

2010 год

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)

математика

1. Два бегуна одновременно начинают бег из одной точки круговой дорожки и одновременно заканчивают бег в той же точке. Если они бегут в одном направлении, то до окончания бега первый спортсмен 2 раза обгоняет второго спортсмена. Если они бегут в разных направлениях, и каждый делает столько же кругов, что и в первом случае, то они встречаются 10 раз до окончания бега. Сколько кругов делает каждый спортсмен?
2. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 5. Найти площадь треугольника, если известно, что его стороны образуют арифметическую прогрессию.
3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sin^{10}\alpha}+\frac{1}{\cos^{10}\alpha}\geq 64$$
4. Задано множество парабол $y=x^2+px-15$, где p - действительное число. Через точки пересечения каждой из этих парабол с осями координат проведена окружность. Найти множество всех точек, являющихся центрами таких окружностей.
5. Известно, что уравнение $x^3+3x^2+px-8=0$ имеет три действительных корня, два из которых удовлетворяют равенству $(x_1+4)(x_2+4)=8$. Найти третий корень уравнения.
6. Функция *f(x)*, определенная для всех действительных значений *x*, удовлетворяет соотношению $f(x^2)-2xf(x+2)-f(x^2+2)=x^2+5x$ при любом значении *x*. Найти *f(3)*.
7. Известно, что $\sqrt{a}+\sqrt{b+1}=c-1$ и $2\sqrt{ab+a}=c^2-6c+13$. Найти *a* и *b*.
8. Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $\sin x=(4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-4a}{27a^4}$ - целые.
9. Решить уравнение
$$\cos^2 x+\left(\cos\frac{1}{x}\right)^2+\left(\cos\frac{x^2-1}{x}\right)^2-\left(\cos\frac{x^2+1}{x}\right)^2=2\cos x\cos\frac{1}{x}\cos\frac{x^2-1}{x}.$$
10. Решить в целых числах уравнение
$$3^{2x+1}+5*3^x+1=y^2.$$