

9 класс

Первый день

- 9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?
- 9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P . Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1 , касающаяся ω_2 . Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2 . Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2 .
- 9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
- 9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

9 класс

Первый день

- 9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?
- 9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P . Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1 , касающаяся ω_2 . Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2 . Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2 .
- 9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
- 9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

10 класс

Первый день

- 10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся.
- 10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.
- 10.3. Последовательность чисел a_1, a_2, \dots задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ при всех $n \geq 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.
- 10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

10 класс

Первый день

- 10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся.
- 10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.
- 10.3. Последовательность чисел a_1, a_2, \dots задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ при всех $n \geq 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.
- 10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

11 класс**Первый день**

- 11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.
- 11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC , и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- 11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы
- $$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n, \quad \dots, \\ \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$
- также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{0}$.
- 11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.)

11 класс**Первый день**

- 11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.
- 11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC , и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- 11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы
- $$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n, \quad \dots, \\ \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$
- также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{0}$.
- 11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.)