Решения и примерные критерии первой проверки ОММО-2010

Приведённые ниже критерии, конечно, не могут охватить все случаи.
И если какое-то решение под критерии не подпадает, то стоит оценивать его по здравому смыслу, а не пытаться искусственно подгонять под какой-то из написанных критериев.

Во всех задачах:

«+» — полностью верное решение.

«–+» — приведен только верный ответ, без каких-либо продвижений в решении

«–» — решение задачи полностью неверно.

За частичные продвижения в решениях возможны также оценки «+.», «+–», «–+» и «–.»
Если задача не решалась — за неё ставится оценка 0.

Специальные критерии по отдельным задачам приведены после решений этих задач.

Задача №1.

Вариант 1

Десятичная запись натурального числа *n* содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четверки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четверок. Найти остаток от деления n на 9.

Решение. Пусть x – число двоек, y – число троек, z число четвёрок. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z=63 \\ x=z+22 \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad y+2z=41.$$

Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр на 9.
Пусть S – сумма цифр. Тогда $S=2x+3y+4z=2(x+y+z)+y+2z=2\cdot 63+41=167$.

Ответ: 5.

Вариант 2.

Десятичная запись натурального числа *n* содержит шестьдесят одну цифру. Среди этих цифр есть тройки, четверки и пятерки. Других цифр нет. Число троек на 11 больше числа пятерок. Найти остаток от деления n на 9.

Решение. Пусть x – число троек, y – число четвёрок, z - число пятёрок. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z=61 \\ x=z+11 \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad y+2z=50.$$

Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр на 9.
Пусть S – сумма цифр. Тогда $S=3x+4y+5z=3(x+y+z)+y+2z=3\cdot 61+50=233$.

Ответ: 8.

Критерии (для обоих вариантов):

«+–» Присутствует идея, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 его суммы цифр, получен верный ответ, но пропущены какие-то шаги в решении.

«–+» Присутствует идея, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 его суммы цифр, но из-за арифметических или других ошибок получен неверный ответ.

Задача №2. В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в несколько раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

Решение. Пусть $n-$ количество клопов, а $m-$ количество блох. Составим систему
$$\begin{cases} kn+m=2012, \\ n+km=2011. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе уравнение, получим $(k-1)(n-m)=1$.

Далее разбираются варианты $k-1=\pm 1$.

$k=0$ не подходит по смыслу. $k=2 \Rightarrow m=670, n=671$.

Ответ: 1341.

Критерии:

«+–» Решение верно, но в ответе указывается дополнительная пара, получающаяся, если количество каких-либо насекомых увеличилось в 0 раз.

Оценка не снижается, если школьник считал, что «несколько раз» не обязательно означает целое число.

Внимание!!! в разосланных 4 апреля решениях была опечатка: правильный ответ 1341, не 1340.

Задача №3 Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии S км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет v км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

Решение: Пусть t – время поездки. x – скорость катера. Тогда $x+v$, $x-v$ — скорость по течению и против течения.

Отсюда $\frac{S}{x-v}+\frac{S}{x+v}\le t$. $\quad S(x+v)+S(x-v)-t(x^2-v^2)\le 0$.

$$tx^2-2Sx-tv^2\ge 0$$

Корни квадратного трехчлена: $x_1=\frac{S-\sqrt{S^2+t^2v^2}}{t}<0$, $\quad x_2=\frac{S+\sqrt{S^2+t^2v^2}}{t}>0$.

Отсюда $x\ge x_2$, а поскольку $t=$ (45–5) минут = 40 минут = 2/3 часа, то

$$x\ge\frac{S+\sqrt{S^2+\left(\frac{2}{3}v\right)^2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3S+\sqrt{9S^2+4v^2}}{2}$$

Ответ: $x\ge\frac{3S+\sqrt{9S^2+4v^2}}{2}$ км/ч

Критерии:

«+–» При верном решении не проведено сравнения корней квадратного уравнения с нулем, откуда возникает дополнительный кусок решения $\left(0;\frac{3S-\sqrt{9S^2+4v^2}}{2}\right)$

Внимание!!! В разосланных 4 апреля решениях была опечатка в ответе.

Правильно: $x \ge \dfrac{3S+\sqrt{9S^2+4v^2}}{2}$

<u>Задача №4.</u> Окружность проходит через вершины А и С треугольника АВС, пересекает сторону АВ в точке Е и сторону ВС в точке F. Найдите радиус окружности, если АС=6, $\angle$AEC=5$\angle$BAF, $\angle$ABC=72°

<u>Решение:</u> Пусть угол BAF равен (в градусах) x, тогда AEC равен $5x$, соответствующие дуги составляют $2x$ и $10x$, их полуразность составляет $4x$ и равна углу АВС. Отсюда x=18 и угол АЕС прямой, т.е. АС(=6) – диаметр.

<u>Ответ</u>: радиус равен 3.

<u>Специальных критериев нет.</u>

<u>Задача №5.</u> Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$.

<u>Ответ:</u> $x = 1$.

<u>Решение</u>. Уравнение $f(x) = x$ имеет корень $x = 1$.

Этот же корень имеет уравнение $f(f(x)) = f(x)$.

Других корней быть не может, поскольку функция $f(x)$ убывает, а $f(f(x))$ – возрастает.

(Вариант 2)

Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = 2^{-x^3-x} - 5$.

<u>Ответ:</u> $x = -1$.

Решение аналогично варианту 1.

<u>Критерии:</u>

«+–» Верно решено уравнение $f(x)=x$, но нет пояснения, как из этого получить решения уравнения $f(f(x))=f(x)$.

<u>Задача №6.</u>

Найти сумму: $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{2} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin\left(\frac{2010\pi}{3}\right)}{2^{2010}}$.

<u>Решение:</u> Месторасположение всех точек отражено на окружности.

С учетом периодичности синуса сумму можно сгруппировать по 6. Тогда получим следующее:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2^2} + \ldots + \frac{\sin\left(\frac{2010\pi}{3}\right)}{2^{2010}} =$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^2}+0*\frac{1}{2^3}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^4}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^5}+0*\frac{1}{2^6}\right)+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^7}+\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^8}+0*\frac{1}{0^9}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^{10}}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^{11}}+0*\frac{1}{2^{12}}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^{2006}}+0*\frac{1}{2^{2007}}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^{2008}}-\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{2^{2009}}+0*\frac{1}{2^{2010}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^{10}}-\frac{1}{2^{11}}\right)+...+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2^{2005}}+\frac{1}{2^{2006}}-\frac{1}{2^{2008}}-\frac{1}{2^{2009}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2^4+2^3-2-1}{2^5}+\frac{2^4+2^3-2-1}{2^{11}}+...+\frac{2^4+2^3-2-1}{2^{2009}}\right)=$$

$$=\frac{21\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^{11}}+...+\frac{1}{2^{2009}}\right)=\frac{21\sqrt{3}}{2}\frac{\frac{1}{2^5}\left(1-\left(\frac{1}{2^6}\right)^{335}\right)}{1-\frac{1}{2^6}}=\frac{21\sqrt{3}}{2^6-1}\left(1-\frac{1}{2^{2010}}\right)\approx 0.557$$

Ответ: $\approx$ 0,557

Критерии:
«+–» Верно подсчитана сумма какой-либо одной из прогрессий

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\ldots+\frac{1}{2^{2004}} \quad \text{или} \quad 1+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2004}}.$$

Комментарий: можно было бы разбивать не на 6, а на 3 прогрессии (с отрицательными знаменателями), и приведенный ответ можно сократить, подставив $2^6-1=63$.

Задача №7. Вариант 1.
Вершины K, L, M, N четырехугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырехугольника $KLMN$, если известно, что $AK=2$ см, $BK=4$ см и $AN=ND$.

Вариант2.
Вершины K, L, M, N четырехугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырехугольника $KLMN$, если известно, что $AK=4$ см, $BK=10$ см и $AN=ND$.

Решение. Отрезок KN имеет фиксированную длину. Построим точки M', N', симметричные к M и N относительно прямой BC, а затем построим точку N'', симметричную N' относительно DC. Сумма длин KL+LM+MN равна длине ломаной KLM'N'' с фиксированными концами. Наименьшая будет для прямолинейного отрезка, длину которого легко найти по теореме Пифагора.

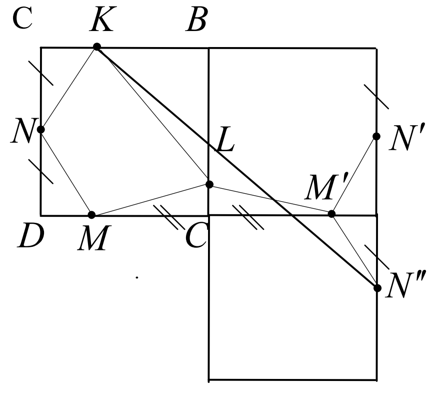


Рис. 1

<u>Ответ:</u> $\left(\sqrt{13}+\sqrt{181}\right)$ см.

<u>Критерии:</u>

«+–» При верном рассуждении из-за арифметической ошибки указан неверный ответ.

<u>Задача №8.</u> *Вариант 1.*

Найти все решения системы $\begin{cases} xy-t^2=9 \\ x^2+y^2+z^2=18 \end{cases}.$

<u>Ответ</u>: (3;3;0;0), (-3;-3;0;0).

<u>Решение</u>

$xy=9+t^2 \Rightarrow xy\ge 9; \quad x^2+y^2=18-z^2 \Rightarrow x^2+y^2\le 18.$

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 18 \\ -2xy\le -18 \end{cases} \Rightarrow (x-y)^2\le 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y.$$

$$\begin{cases} 2x^2\le 18 \\ x^2\ge 9 \end{cases} \Rightarrow x^2=9, \quad x=\pm 3, \quad y=x=\pm 3.$$

При этом $t=z=0$.

*Вариант 2.*Найти все x, y и z, удовлетворяющие равенствам $\begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right)+\log_2\left(y^2+1\right)=4, \\ x^2+y^2=2\cos^2 z+4. \end{cases}$

<u>Ответ</u>: $\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\pi n\right),\left(\sqrt{3};-\sqrt{3};\pi n\right),\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};\pi n\right),\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3};\pi n\right),\ n\in Z.$

<u>Решение</u>

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=16, \\ \left(x^2+1\right)+\left(y^2+1\right)\le 8. \end{cases}$$

Покажем, что для решений системы $x^2=y^2$. Пусть $x^2+1=u, \quad y^2+1=v.$ Тогда

$$\begin{cases} uv=16 \\ u+v\le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4uv=64 \\ u^2+2uv+v^2\le 64 \end{cases} \Rightarrow u^2-2uv+v^2\le 0, \quad (u-v)^2\le 0, \quad u=v, \quad x^2=y^2.$$

Следовательно, $\left(x^2+1\right)^2=16, \quad x^2+1=4, \quad x^2=3, \quad x=\pm\sqrt{3}.$

$y^2=3\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$ (при этом знаки x и y выбираются независимо друг от друга).

Так как $x^2+1+y^2+1=8,$ то $\cos^2 z=1, \quad \sin z=0, \quad z=\pi n.$

<u>Критерии:</u>

1 вариант: «+–» Указаны лишние пары $x=-y=\pm 3$.

2 вариант: «+–» Не указаны пары, где $x=-y$.

<u>Задача №9.</u> Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой – в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

Решение. Части шара радиуса $R=1$ см, отъеденные от двух вершин при некотором боковом ребре призмы, можно сложить так, что получится долька шара, лежащая внутри двугранного угла α, образованного плоскостями, проходящими через центр и параллельными граням при этом боковом ребре. Объем этой дольки равен $\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$. После суммирования отъеденных объемов по всем ребрам (для пятиугольной призмы $\sum \alpha_i = 3\pi$), получим суммарный съеденный объем равный $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$.

Заметим, что если к указанной в условии пирамиде пристроить 5 таких же пирамид, имеющих с ней общую вершину, так, что соседние пирамиды имеют общую боковую грань, то получится куб. Если бы мыши отъели все вершины от этих шести пирамид, то получилось бы, что съедены углы у куба и еще шарик в его центре. Таким образом, на одну пирамиду приходится шестая часть объема двух полных шаров, то есть $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$.

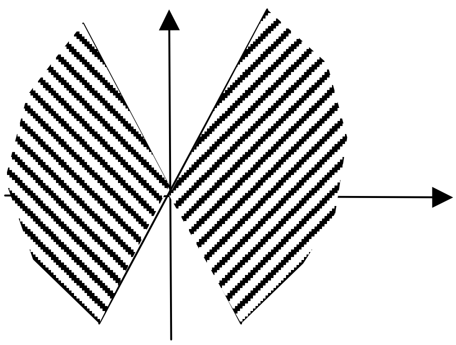
Ответ: Ущерб первого фермера больше в 4,5 раза.

Критерии:
«+–» Верно подсчитан объём хотя бы одной из двух съеденной частей.

Призма считается прямой. Но, разумеется, оценка не снижается, если школьник что-то говорит и про случай наклонной.

Задача 10.
Изобразить на координатной плоскости множество точек (a,b) таких, что система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x+y=b \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $|b| \le \sqrt{2}\,|a|$



Решение
Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром (0;0) радиусом $|a|$, второе – уравнением прямой $y = b - x$. Если $|b| = \sqrt{2}\,|a|$, то прямая касается окружности, то есть система имеет единственное решение. Если $|b| < \sqrt{2}\,|a|$, то прямая пересекает окружность, т.е. система имеет два решения.
Если $|b| > \sqrt{2}\,|a|$, то прямая и окружность не пересекаются и система не имеет решений. Итак, $|b| \le \sqrt{2}\,|a|$.

Критерии:
«+–» Есть идея изобразить множества решений системы графически, но неверно найдено уравнение нужной касательной.