

## Решения и примерные критерии первой проверки ОММО-2010

Приведённые ниже критерии, конечно, не могут охватить все случаи. И если какое-то решение под критерии не подпадает, то стоит оценивать его по здравому смыслу, а не пытаться искусственно подогнать под какой-то из написанных критериев.

Во всех задачах:

«+» — полностью верное решение.

«-+» — приведен только верный ответ, без каких-либо продвижений в решении

«-» — решение задачи полностью неверно.

За частичные продвижения в решениях возможны также оценки «+.», «+-», «-+» и «-.»  
Если задача не решалась — за неё ставится оценка 0.

*Специальные критерии по отдельным задачам приведены после решений этих задач.*

### Задача №1.

#### Вариант 1

Десятичная запись натурального числа  $n$  содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четверки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четверок. Найти остаток от деления  $n$  на 9.

Решение. Пусть  $x$  – число двоек,  $y$  – число троек,  $z$  число четвёрок. Тогда

$$\begin{cases} x + y + z = 63 \\ x = z + 22 \end{cases} \quad \text{Отсюда } y + 2z = 41.$$

Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр на 9. Пусть  $S$  – сумма цифр. Тогда  $S = 2x + 3y + 4z = 2(x + y + z) + y + 2z = 2 \cdot 63 + 41 = 167$ .

*Ответ:* 5.

#### Вариант 2.

Десятичная запись натурального числа  $n$  содержит шестьдесят одну цифру. Среди этих цифр есть тройки, четверки и пятерки. Других цифр нет. Число троек на 11 больше числа пятерок. Найти остаток от деления  $n$  на 9.

Решение. Пусть  $x$  – число троек,  $y$  – число четвёрок,  $z$  - число пятёрок. Тогда

$$\begin{cases} x + y + z = 61 \\ x = z + 11 \end{cases} \quad \text{Отсюда } y + 2z = 50.$$

Остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр на 9. Пусть  $S$  – сумма цифр. Тогда  $S = 3x + 4y + 5z = 3(x + y + z) + y + 2z = 3 \cdot 61 + 50 = 233$ .

*Ответ:* 8.

Критерии (для обоих вариантов):

«+-» Присутствует идея, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 его суммы цифр, получен верный ответ, но пропущены какие-то шаги в решении.

«-+» Присутствует идея, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 его суммы цифр, но из-за арифметических или других ошибок получен неверный ответ.

**Задача №2.** В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в несколько раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

Решение. Пусть  $n$  – количество клопов, а  $m$  – количество блох. Составим систему

$$\begin{cases} kn + m = 2012, \\ n + km = 2011. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе уравнение, получим  $(k-1)(n-m)=1$ .

Далее разбираются варианты  $k-1 = \pm 1$ .

$k=0$  не подходит по смыслу.  $k=2 \Rightarrow m=670, n=671$ .

Ответ: 1341.

Критерии:

«+» Решение верно, но в ответе указывается дополнительная пара, получающаяся, если количество каких-либо насекомых увеличилось в 0 раз.

*Оценка не снижается, если школьник считал, что «несколько раз» не обязательно означает целое число.*

**Внимание!!!** в разосланных 4 апреля решениях была опечатка: правильный ответ 1341, не 1340.

**Задача №3** Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии  $S$  км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет  $V$  км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

Решение: Пусть  $t$  – время поездки.  $x$  – скорость катера. Тогда  $x+v$ ,  $x-v$  — скорость по течению и против течения.

Отсюда  $\frac{S}{x-v} + \frac{S}{x+v} \leq t$ .  $S(x+v) + S(x-v) - t(x^2 - v^2) \leq 0$ .

$tx^2 - 2Sx - tv^2 \geq 0$

Корни квадратного трехчлена:  $x_1 = \frac{S - \sqrt{S^2 + t^2v^2}}{t} < 0$ ,  $x_2 = \frac{S + \sqrt{S^2 + t^2v^2}}{t} > 0$ .

Отсюда  $x \geq x_2$ , а поскольку  $t = (45-5)$  минут = 40 минут =  $\frac{2}{3}$  часа, то

$x \geq \frac{S + \sqrt{S^2 + (\frac{2}{3}v)^2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3S + \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}$

Ответ:  $x \geq \frac{3S + \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}$  км/ч

Критерии:

«+» При верном решении не проведено сравнения корней квадратного уравнения с нулем, откуда возникает дополнительный кусок решения  $\left(0; \frac{3S - \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}\right)$

**Внимание!!!** В разосланных 4 апреля решениях была опечатка в ответе.

Правильно:  $x \geq \frac{3S + \sqrt{9S^2 + 4v^2}}{2}$

**Задача №4.** Окружность проходит через вершины А и С треугольника АВС, пересекает сторону АВ в точке Е и сторону ВС в точке F. Найдите радиус окружности, если  $AC=6$ ,  $\angle AEC=5\angle BAF$ ,  $\angle ABC=72^\circ$

Решение: Пусть угол ВAF равен (в градусах)  $x$ , тогда АЕС равен  $5x$ , соответствующие дуги составляют  $2x$  и  $10x$ , их полуразность составляет  $4x$  и равна углу АВС. Отсюда  $x=18$  и угол АЕС прямой, т.е. АС(=6) – диаметр.

Ответ: радиус равен 3.

Специальных критериев нет.

**Задача №5.** Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt[5]{3-x^3-x}$ .

Ответ:  $x = 1$ .

Решение. Уравнение  $f(x) = x$  имеет корень  $x = 1$ .

Этот же корень имеет уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ .

Других корней быть не может, поскольку функция  $f(x)$  убывает, а  $f(f(x))$  – возрастает.

(Вариант 2)

Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = 2^{-x^3-x} - 5$ .

Ответ:  $x = -1$ .

Решение аналогично варианту 1.

Критерии:

«+» Верно решено уравнение  $f(x)=x$ , но нет пояснения, как из этого получить решения уравнения  $f(f(x))=f(x)$ .

**Задача №6.**

Найти сумму:  $\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \dots + \frac{\sin \left(\frac{2010\pi}{3}\right)}{2^{2010}}$ .

Решение: Месторасположение всех точек отражено на окружности.

С учетом периодичности синуса сумму можно сгруппировать по 6. Тогда получим следующее:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \dots + \frac{\sin \left(\frac{2010\pi}{3}\right)}{2^{2010}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^2} + 0 * \frac{1}{2^3} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^4} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^5} + 0 * \frac{1}{2^6} \right) + \\
&+ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^7} + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^8} + 0 * \frac{1}{2^9} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^{10}} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^{11}} + 0 * \frac{1}{2^{12}} \right) + \dots + \\
&+ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^{2006}} + 0 * \frac{1}{2^{2007}} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^{2008}} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2^{2009}} + 0 * \frac{1}{2^{2010}} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{11}} \right) + \dots + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2^{2005}} + \frac{1}{2^{2006}} - \frac{1}{2^{2008}} - \frac{1}{2^{2009}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{2^4 + 2^3 - 2 - 1}{2^5} + \frac{2^4 + 2^3 - 2 - 1}{2^{11}} + \dots + \frac{2^4 + 2^3 - 2 - 1}{2^{2009}} \right) = \\
&= \frac{21\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^{11}} + \dots + \frac{1}{2^{2009}} \right) = \frac{21\sqrt{3}}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2^6}\right)^{335}}{1 - \frac{1}{2^6}} = \frac{21\sqrt{3}}{2^6 - 1} \left(1 - \frac{1}{2^{2010}}\right) \approx 0.557
\end{aligned}$$

Ответ:  $\approx 0,557$

Критерии:

«+» Верно подсчитана сумма какой-либо одной из прогрессий

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{2004}} \quad \text{или} \quad 1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} .$$

Комментарий: можно было бы разбивать не на 6, а на 3 прогрессии (с отрицательными знаменателями), и приведенный ответ можно сократить, подставив  $2^6 - 1 = 63$ .

**Задача №7.** Вариант 1.

Вершины  $K, L, M, N$  четырехугольника  $KLMN$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$ . Найти наименьший возможный периметр четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что  $AK = 2$  см,  $BK = 4$  см и  $AN = ND$ .

Вариант 2.

Вершины  $K, L, M, N$  четырехугольника  $KLMN$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$ . Найти наименьший возможный периметр четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что  $AK = 4$  см,  $BK = 10$  см и  $AN = ND$ .

Решение. Отрезок  $KN$  имеет фиксированную длину. Построим точки  $M', N'$ , симметричные к  $M$  и  $N$  относительно прямой  $BC$ , а затем построим точку  $N''$ , симметричную  $N'$  относительно  $DC$ . Сумма длин  $KL + LM + MN$  равна длине ломаной  $KLM'N''$  с фиксированными концами. Наименьшая будет для прямолинейного отрезка, длину которого легко найти по теореме Пифагора.

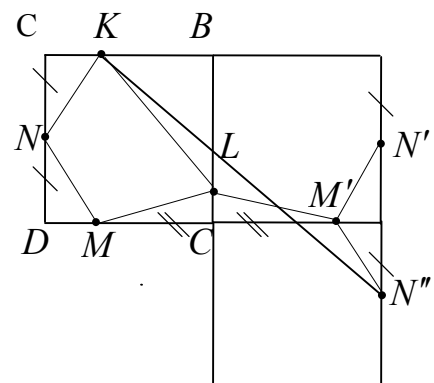


Рис. 1

Ответ:  $(\sqrt{13} + \sqrt{181})$  см.

Критерии:

«+→» При верном рассуждении из-за арифметической ошибки указан неверный ответ.

**Задача №8. Вариант 1.**

Найти все решения системы 
$$\begin{cases} xy - t^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases}$$

Ответ:  $(3; 3; 0; 0)$ ,  $(-3; -3; 0; 0)$ .

Решение

$$xy = 9 + t^2 \Rightarrow xy \geq 9; \quad x^2 + y^2 = 18 - z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 18.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 18 \\ -2xy \leq -18 \end{cases} \Rightarrow (x - y)^2 \leq 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$\begin{cases} 2x^2 \leq 18 \\ x^2 \geq 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9, \quad x = \pm 3, \quad y = x = \pm 3.$$

При этом  $t = z = 0$ .

**Вариант 2.** Найти все  $x$ ,  $y$  и  $z$ , удовлетворяющие равенствам 
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 1) + \log_2(y^2 + 1) = 4, \\ x^2 + y^2 = 2 \cos^2 z + 4. \end{cases}$$

Ответ:  $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \pi n)$ ,  $(\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \pi n)$ ,  $(-\sqrt{3}; \sqrt{3}; \pi n)$ ,  $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \pi n)$ ,  $n \in Z$ .

Решение

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 16, \\ (x^2 + 1) + (y^2 + 1) \leq 8. \end{cases}$$

Покажем, что для решений системы  $x^2 = y^2$ . Пусть  $x^2 + 1 = u$ ,  $y^2 + 1 = v$ . Тогда

$$\begin{cases} uv = 16 \\ u + v \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4uv = 64 \\ u^2 + 2uv + v^2 \leq 64 \end{cases} \Rightarrow u^2 - 2uv + v^2 \leq 0, \quad (u - v)^2 \leq 0, \quad u = v, \quad x^2 = y^2.$$

Следовательно,  $(x^2 + 1)^2 = 16$ ,  $x^2 + 1 = 4$ ,  $x^2 = 3$ ,  $x = \pm\sqrt{3}$ .

$y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$  (при этом знаки  $x$  и  $y$  выбираются независимо друг от друга).

Так как  $x^2 + 1 + y^2 + 1 = 8$ , то  $\cos^2 z = 1$ ,  $\sin z = 0$ ,  $z = \pi n$ .

Критерии:

1 вариант: «+→» Указаны лишние пары  $x = -y = \pm 3$ .

2 вариант: «+→» Не указаны пары, где  $x = -y$ .

**Задача №9.** Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой – в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

Решение. Части шара радиуса  $R = 1$  см, отъеденные от двух вершин при некотором боковом ребре призмы, можно сложить так, что получится долька шара, лежащая внутри двугранного угла  $\alpha$ , образованного плоскостями, проходящими через центр и параллельными граням при этом боковом ребре. Объем этой дольки равен  $\frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ . После суммирования отъеденных объемов по всем ребрам (для пятиугольной призмы  $\sum \alpha_i = 3\pi$ ), получим суммарный съеденный объем равный  $\frac{3}{2} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ .

Заметим, что если к указанной в условии пирамиде пристроить 5 таких же пирамид, имеющих с ней общую вершину, так, что соседние пирамиды имеют общую боковую грань, то получится куб. Если бы мыши отъели все вершины от этих шести пирамид, то получилось бы, что съедены углы у куба и еще шарик в его центре. Таким образом, на одну пирамиду приходится шестая часть объема двух полных шаров, то есть  $\frac{1}{3} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ .

Ответ: Ущерб первого фермера больше в 4,5 раза.

Критерии:

«+» Верно подсчитан объем хотя бы одной из двух съеденной частей.

*Призма считается прямой. Но, разумеется, оценка не снижается, если школьник что-то говорит и про случай наклонной.*

### Задача 10.

Изобразить на координатной плоскости множество точек  $(a,b)$  таких, что система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$  имеет хотя бы одно решение.

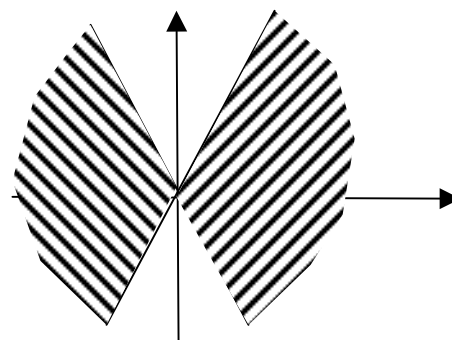
Ответ:  $|b| \leq \sqrt{2}|a|$

Решение

Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром  $(0;0)$  радиусом  $|a|$ , второе – уравнением прямой  $y = b - x$ . Если  $|b| = \sqrt{2}|a|$ , то прямая касается окружности, то есть система имеет единственное решение. Если  $|b| < \sqrt{2}|a|$ , то прямая пересекает окружность, т.е. система имеет два решения.

Если  $|b| > \sqrt{2}|a|$ , то прямая и окружность не пересекаются и система не имеет решений.

Итак,  $|b| \leq \sqrt{2}|a|$ .



Критерии:

«+» Есть идея изобразить множества решений системы графически, но неверно найдено уравнение нужной касательной.