

# Объединенная межвузовская математическая олимпиада

I вариант.

04.04.2010

**Задача 1.** Десятичная запись натурального числа  $n$  содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четверки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четверок. Найти остаток от деления  $n$  на 9.

**Задача 2.** В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в некоторое число раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

**Задача 3.** Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии  $S$  км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет  $v$  км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

**Задача 4.** Окружность проходит через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$  и сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите радиус окружности, если  $AC = 6$ ,  $\angle AEC = 5\angle BAF$ ,  $\angle ABC = 72^\circ$ .

**Задача 5.** Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$ .

**Задача 6.** Найдите сумму:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{3}}{2^3} + \dots + \frac{\sin \frac{2010\pi}{3}}{2^{2010}}$$

**Задача 7.** Вершины  $K, L, M, N$  четырехугольника  $KLMN$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$ . Найти наименьший возможный периметр четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что  $AK = 2$  см,  $BK = 4$  см и  $AN = ND$ .

**Задача 8.** Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy - t^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases}$$

**Задача 9.** Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз его ущерб больше?

**Задача 10.** Изобразите на координатной плоскости множество точек  $(a; b)$  таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

# Объединенная межвузовская математическая олимпиада

II вариант.

04.04.2010

**Задача 1.** Десятичная запись натурального числа  $n$  содержит шестьдесят одну цифру. Среди этих цифр есть тройки, четверки и пятерки. Других цифр нет. Число троек на 11 больше числа пятерок. Найти остаток от деления  $n$  на 9.

**Задача 2.** В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в некоторое число раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

**Задача 3.** Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что на расстоянии  $S$  км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет  $v$  км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займет 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

**Задача 4.** Окружность проходит через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$  и сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите радиус окружности, если  $AC = 6$ ,  $\angle AEC = 5\angle BAF$ ,  $\angle ABC = 72^\circ$ .

**Задача 5.** Решите уравнение  $f(f(x)) = f(x)$ , где  $f(x) = 2^{-x^3-x} - 5$ .

**Задача 6.** Найдите сумму:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{3}}{2^3} + \dots + \frac{\sin \frac{2010\pi}{3}}{2^{2010}}$$

**Задача 7.** Вершины  $K, L, M, N$  четырехугольника  $KLMN$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$ . Найти наименьший возможный периметр четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что  $AK = 4$  см,  $BK = 10$  см и  $AN = ND$ .

**Задача 8.** Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 1) + \log_2(y^2 + 1) = 4 \\ x^2 + y^2 = 2\cos^2 z + 4 \end{cases}$$

**Задача 9.** Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз его ущерб больше?

**Задача 10.** Изобразите на координатной плоскости множество точек  $(a; b)$  таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.