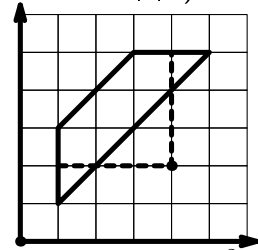


**Московская олимпиада школьников  
(Объединенная межвузовская математическая олимпиада)  
Примерные решения**



1. *Ответ:*  $(4; 2), \sqrt{10}$ .

*Решение.* Искомый центр лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.

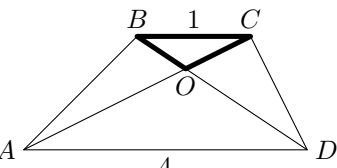
2. *Решение.* По формуле сокращенного умножения  $6255^3 - 5995^3 = (6255 - 5995) \cdot (6255^2 + 6255 \cdot 5995 + 5995^2) = 260 \cdot (\dots) = 13 \cdot 20 \cdot (\dots)$ .

3. *Ответ:* В 3 раза.

*Решение.* Пусть скорость Гарри —  $v$ , а крысы —  $u$ . Тогда скорость дракона —  $5v$ , а расстояние между Гарри и крысой в начале погони —  $(5v + u) \cdot 0,5$ . Так как Гарри догнал крысу через 4 минуты,  $4(v - u) = (5v + u) \cdot 0,5$ , откуда  $u = 3v$ .

4. *Ответ:*  $S/25$ .

*Решение.*  $S_{ABC} = S/5$ , так как  $S_{ABC}/S_{ACD} = 1/4$  (высота общая, основания относятся как 1 : 4). Треугольники  $BOC$  и  $DOA$  подобны с отношением 1 : 4, поэтому  $CO/CA = 1/5$ , а значит,  $S_{BOC} = S_{ABC}/5 = S/25$ .



5. *Ответ:*  $3 + 3^{-2009}$ .

*Решение.* Посмотрим, что происходит при применении  $f$  к некоторому числу. Заметим, что  $f(x) - 3 = \frac{x}{3} - 1 = \frac{x-3}{3}$ , т.е. каждое применение  $f$  сокращает расстояние от числа до 3 в три раза. Для  $x = 4$  оно было равно 1, а значит, после 2009 применений  $f$  это расстояние станет равным  $3^{-2009}$ . Соответственно, само число станет равным  $3 + 3^{-2009}$ .

Можно решать задачу и по-другому:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + x/3; \\ f(f(x)) &= 2 + 2/3 + x/9; \\ f(f(f(x))) &= 2 + 2/3 + 2/9 + x/27; \\ &\dots \\ \underbrace{f(\dots f(f(x))\dots)}_{2009} &= (2 + 2/3 + \dots + 2/3^{2008}) + x/3^{2009}. \end{aligned}$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии, последнее выражение равно  $2 \cdot \frac{1 - 1/3^{2009}}{1 - 1/3} + x/3^{2009} = 3 + (x - 3)/3^{2009}$ . Подставляя  $x = 4$ , получаем ответ.

6. *Ответ:* 16.

*Решение.*  $a_3 = a_1 + 2d$ ,  $a_4 = a_1 + 3d$ ,  $a_7 = a_1 + 6d$ ,  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  ( $a_i$  —  $i$ -й член прогрессии,  $d$  — ее разность,  $n$  — искомое число членов). Из условия следует, что  $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 6d)$ ,  $(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + (n - 1)d)$ . Из первого уравнения находим, что  $a_1 = -\frac{3}{2}d$ . Подставляя во второе уравнение, находим  $(9d/2)^2 = \frac{3}{2}d((n - 1)d - 3d/2)$ , откуда  $2n - 5 = 27$ , а  $n = 16$ .

7. *Решение.* Пусть стороны треугольника имеют длины  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а соответствующие высоты —  $h_a$ ,  $h_b$  и  $h_c$ . Вычисляя площадь треугольника разными способами, получаем, что  $2S = (a + b + c)r = ah_a = bh_b = ch_c$ , откуда (так как  $r = 1$ )  $h_a = (a + b + c)/a$  (аналогично для остальных высот). Значит,  $1/h_a + 1/h_b + 1/h_c = 1$ . Последнее уравнение имеет

в натуральных числах только три решения (с точностью до перестановки):  $(2, 4, 4)$ ,  $(2, 3, 6)$  и  $(3, 3, 3)$ . Первые два из них дают  $a, b$  и  $c$ , не удовлетворяющие неравенству треугольника:  $(S, S/2, S/2)$  и  $(S, 2S/3, S/3)$ . Оставшийся случай соответствует правильному треугольнику со стороной  $2\sqrt{3}$  (которая находится из радиуса вписанной окружности).

**8. Ответ:** 0.

*Решение.* Заметим, что если  $x$  корень данного уравнения, то и  $-x$  его корень. Так как значения функции  $f(x) = 2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0$  имеют разные знаки в концах отрезка  $[0; 2\pi/3]$ , корни у него есть, и в силу предыдущего замечания, их сумма на отрезке  $[-2\pi/3; 2\pi/3]$  равна нулю. Осталось показать, что на промежутке  $(2\pi/3; 3\pi/4]$  корней нет. Но действительно, на этом промежутке  $2\pi < 3x \leq 2\pi + \pi/4$ , поэтому  $\cos 3x \geq 1/\sqrt{2}$ ; а  $|\sin x| \geq 1/\sqrt{2}$ ; значит,  $f(x) > 2 \cdot 1/\sqrt{2} + 8 \cdot 1/\sqrt{2} - 7 = 5\sqrt{2} - 7 > 0$ .

**9. Ответ:**  $\sqrt{2}/24$ .

*Решение.* Проведем через противоположные ребра тетраэдра пары параллельных плоскостей. Получим, что наш тетраэдр вписан в куб со стороной  $\sqrt{2}/2$ . Тогда результат поворота — второй тетраэдр, вписанный в тот же куб. Их пересечение — многогранник, вершины которого — центры граней куба, т. е. октаэдр. Нетрудно подсчитать, что он занимает  $1/6$  объема куба, т. е.  $\sqrt{2}/24$ .

**10. Ответ:**  $[25/17; 17]$ .

*Решение.* Система неравенств описывает треугольник на плоскости  $XOY$  с вершинами  $A(-4; 1)$ ,  $B(-2; 3)$ ,  $C(-1; -1)$ .

Функция  $x^2 + y^2$  — это квадрат расстояния до начала координат. Наименьшее значение она принимает на прямой  $BC$ . Функция  $x^2 + (-4x - 5)^2 = 17x^2 + 40x + 25$  принимает наибольшее значение  $25/17$  при  $x = -20/17 \in [-2; -1]$  (соответствующая точка — это основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $BC$ , а значение — квадрат длины этого перпендикуляра). Наибольшее же значение —  $17$  — она принимает в точке  $A$ .

