LXXIII Московская математическая олимпиада, 11 класс

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение
$$1 : (a + 2010 : (b + 1 : c)),$$
где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

2. В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

3. Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы
$$\begin{cases} y = x^n + px + q \\ z = y^n + py + q \\ x = z^n + pz + q, \end{cases}$$
то выполнено неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant x^2z + y^2x + z^2y$, где
а) $n = 2$; б) $n = 2010$.

4. Функция f каждому вектору v (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причем для любых векторов u, v и любых чисел α, β значение $f(\alpha u + \beta v)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?

5. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PBA = \angle PCD = 90^\circ$. Точка M — середина стороны AD, причём $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$.

6. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких её участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого её члена, может гарантированно получить:
а) при $n = k = 2$;
б) при произвольных фиксированных n и k?

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 03.04.2010.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 14 марта 2010 года

LXXIII Московская математическая олимпиада, 11 класс

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение
$$1 : (a + 2010 : (b + 1 : c)),$$
где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

2. В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

3. Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы
$$\begin{cases} y = x^n + px + q \\ z = y^n + py + q \\ x = z^n + pz + q, \end{cases}$$
то выполнено неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant x^2z + y^2x + z^2y$, где
а) $n = 2$; б) $n = 2010$.

4. Функция f каждому вектору v (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причем для любых векторов u, v и любых чисел α, β значение $f(\alpha u + \beta v)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?

5. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PBA = \angle PCD = 90^\circ$. Точка M — середина стороны AD, причём $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$.

6. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких её участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого её члена, может гарантированно получить:
а) при $n = k = 2$;
б) при произвольных фиксированных n и k?

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 03.04.2010.
Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://olympiads.mccme.ru/mmo.

Москва, 14 марта 2010 года