

**Олимпиада МГУ  
«Покори Воробьевы горы — 2011»**

**Задание заочного тура олимпиады МГУ по математике, 11 класс**

1. Какое время между 14:10 и 15:10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен  $90^\circ$ ?
2. Решите неравенство  $\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geq 1$ .
3. Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?
4. Натуральные числа  $m, n$  таковы, что дробь  $\frac{m}{n}$  несократима, а дробь  $\frac{4m + 3n}{5m + 2n}$  сократима. На какие натуральные числа она сокращается?
5. Решите уравнение  $\sqrt[3]{15x + 1 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4$ .
6. В прямоугольной трапеции большая диагональ длины 11 делит острый угол трапеции в отношении  $2 : 1$ , а расстояние от вершины тупого угла до этой диагонали равно 4. Какие значения может принимать площадь трапеции?
7. Найдите наибольшее значение выражения

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{2010} - x_{2011})^2 + (x_{2011} - x_1)^2$$

при  $x_1, \dots, x_{2011} \in [0; 1]$ .

8. Решите систему
$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - yz - 10y + 5 = 0, \\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 - 14xy - 98xz + 14yz - 182x - 102y + 182z + 233 = 0. \end{cases}$$
9. В тетраэдре все плоские углы при одной вершине — прямые. Некоторая точка пространства удалена от указанной вершины тетраэдра на расстояние 3, а от остальных его вершин — на расстояния  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$  и  $\sqrt{7}$ . Найдите расстояния от центра описанной около тетраэдра сферы до каждой из его граней.
10. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в 2 слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?