Олимпиада «Покори Воробьевы горы — 2012»

10 и 11 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9 а)		
№9 б)		
№9 в)		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

1. В результате опроса учеников школы выяснилось, что ровно 68% учеников знают год рождения А. С. Пушкина, ровно 5/18 учеников умеют доказывать теорему Пифагора, ровно 23/30 учеников любят ходить в кино и ровно 512 учеников читали сказку А. де Сент-Экзюпери “Маленький принц”. Найдите минимально возможное количество учеников в этой школе.

2. Два школьника — Андрей и Борис — 1 сентября 2011 года ровно в полдень поставили свои часы абсолютно точно. У обоих школьников стандартные механические часы с секундной стрелкой и двенадцатичасовым циферблатом. Известно, что часы Бориса спешат на 30 секунд в сутки, а часы Андрея отстают на 20 секунд в сутки. Укажите точную дату (число, месяц, год), когда в следующий раз их часы без поправок одновременно покажут абсолютно точное время.

3. В треугольнике ABC из вершины A проведены медиана AM и биссектриса AL, а стороны, прилегающие к вершине A, относятся как $3 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ALM и ABL.

4. Что меньше: $\sin 1$ или $\cos\frac{1}{2^1}\cdot\cos\frac{1}{2^2}\cdot\cos\frac{1}{2^3}\cdot\ \ldots\ \cdot\cos\frac{1}{2^{2012}}$?

5. Решите систему
$$\begin{cases} |x| + 6y \geqslant 1 \\ 37x^2 + 37y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

6. Маше нужно было вычислить значение выражения $\sin(2\arccos\alpha)$ при заданном значении α. Однако Маша, по невнимательности, вычислила значение выражения $\cos(2\arcsin\alpha)$, но при том же значении α, причем вычислила верно. Оказалось, что Машин ответ совпал с правильным ответом для исходного выражения. Каким при этом могло быть число α (укажите все возможные значения)?

7. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ равны между собой. Сфера, проходящая через вершины S, A, B и середину M ребра SC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AC = 8$, $MK = 6$, $\angle ABC = 30^\circ$, а площадь треугольника KLM равна 18.

8. При каждом действительном значении параметра a найдите количество различных действительных корней уравнения
$$16x^4 + ax^2 + 1 = 32x^3 + 8x.$$

9. Квадрат со стороной 1 разрезан на три выпуклых многоугольника, у каждого из которых длины любой стороны и любой диагонали не превосходят некоторого числа d.
а) Может ли число d быть равным 1,01?
б) Может ли число d быть равным 1?
в) Найдите наименьшее значение d при этих условиях.