Материалы для проведения регионального этапа

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

Второй день

27–28 января 2012 г.

Москва, 2011

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.А. Адуенко, А.В. Акопян, А.В. Антропов, Д.С. Бабичев, А.А. Баган, А.Я. Белов-Канель, Н.В. Богачёв, И.И. Богданов, В.А. Брагин, Р.А. Гимадеев, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, С.А. Дориченко, М.А. Евдокимов, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, Ф.А. Ивлев, П.А. Кожевников, П.Ю. Козлов, М.А. Кунгожин, И.В. Макаров, Е.Г. Молчанов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, К.А. Праведников, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011–2012 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 27 и 28 января 2012 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался? (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть Фокусник после первого действия не тасует карты, а собирает их, не нарушая порядок в столбцах, и складывает в колоду один столбец за другим. Второй раз он выкладывает карты построчно, т.е. бывшие столбцы становятся строками (это нетрудно сделать, выкладывая ту же колоду по горизонтали). После ответа Зрителя, Фокусник знает номер строки и столбца в первой раскладке, содержащих загаданную карту, что и позволяем ему назвать её.

Замечание. Приведённый алгоритм — не единственный возможный.

Комментарий. Верный алгоритм без обоснования или с неверным обоснованием — 4 балла.

9.6. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$. (*И. Богданов*)

Решение. Заметим, что $2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = (a^5 - b^5) + a^2b^2(a - b) \geqslant 4 + a^2b^2(a - b)$. Поскольку $a^3 > b^3$, мы имеем $a > b$, а значит, $a^2b^2(a - b) \geqslant 0$. Итак, $2(a^2 + b^2) \geqslant 4$, откуда и следует утверждение задачи.

9.7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно. (*Т. Емельянова*)

Решение. Пусть M — середина отрезка EF, B_0 — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Можно считать, что точка D лежит на отрезке AB_0. Точки A_0 и C_0 симметричны точке B_0 относительно биссектрис углов C и A соответственно. Следовательно, точка E лежит на отрезке AC_0, а точка F — на продолжении отрезка CA_0, и $EC_0 = DB_0 = FA_0$.

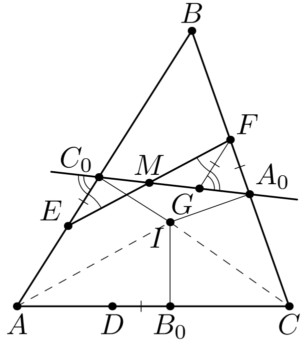

Рис. 1

Отметим на прямой A_0C_0 точку G так, чтобы отрезки FG и AB были параллельны. Тогда треугольники FGA_0 и BC_0A_0 подобны; поскольку $BC_0 = BA_0$, получаем $FG = FA_0 = EC_0$. Далее, из параллельности имеем $\angle FEC_0 = \angle EFG$ и $\angle EC_0G = \angle FGC_0$. Значит, треугольники EC_0M и FGM равны по стороне и двум углам, и $EM = MF$.

Комментарий. Доказано только, что точки E и F лежат на прямых AB и BC соответственно — 0 баллов.

Доказано, что $C_0E = A_0F$ — 2 балла.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами? (*Б. Трушин*)

Ответ. При всех n, кратных трём.

Решение. Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа — те, которые были чёрными. Заметим, что если какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того, чтобы клетка первого типа стала чёрной, её нужно перекрасить $3k+1$ раз при некотором целом k (для разных клеток k может быть разным). Значит, если a — количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K+a$ при некотором целом K. Чтобы клетка второго типа стала белой, её нужно перекрасить $3m+2$ раза. Значит, если b — количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M+2b$ раз.

Далее, в любом квадрате 2×2 клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Поэтому $3K+a=3M+2b$, откуда $a+b=3(M-K+b)$, то есть общее количество клеток $a+b$ делится на три. Значит n^2 кратно трем, а поэтому и n кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты 3×3. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая — либо угловые клетки белые, либо чёрные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае — по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

Замечание. В доказательстве того, что n делится на 3, можно рассматривать не все n^2 клеток, а n клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду, скажем, n клеток, примыкающие к нижней стороне.

Комментарий. Доказано, что n должно делиться на 3 — 4 балла.

Приведен пример, показывающий, что при n, делящемся на 3, условие задачи выполнимо — 2 балла.

Рассмотрены лишь несколько небольших значений n — 0 баллов.

10 класс

10.5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Петей, оказаться различными? (*Н. Агаханов, П. Кожевников*)

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим противное; тогда все углы пятиугольника — различные числа из интервала $(0, \pi)$. Заметим сразу, что тогда у Пети не найдётся трёх равных чисел, ибо в этом интервале нет трёх различных углов с равными синусами.

Значит, у Пети должны быть две пары равных чисел: $\sin\alpha = \sin\beta$ и $\sin\gamma = \sin\delta$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, мы получаем $\alpha = \pi - \beta$; аналогично $\gamma = \pi - \delta$.

Пусть теперь ε — пятый угол пятиугольника. Поскольку сумма углов пятиугольника равна 3π, имеем $\varepsilon = 3\pi - (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) = 3\pi - \pi - \pi = \pi$. Это невозможно, так как $\varepsilon < \pi$.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

Верно разобран лишь случай, когда три синуса равны — 2 балла.

Верно разобран лишь случай, когда есть две пары равных синусов — 4 балла.

10.6. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1 + a$, $1 + a^2$, $1 + a^3$, $\ldots$, $1 + a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске? (*О. Подлипский*)

Ответ. 4 числа.

Решение. Покажем сначала, что искомых чисел не может быть более четырех. Заметим, что если k — нечётное, то число $1 + a^{nk} = 1^k + (a^n)^k$ делится на $1 + a^n$. Далее, каждое из чисел $1, 2, \ldots, 15$ имеет один из видов $k, 2k, 4k, 8k$, где k нечётно. Таким образом, каждое из чисел $1 + a$, $1 + a^2$, $1 + a^3$, $\ldots$, $1 + a^{15}$ делится либо на $1 + a$, либо на $1 + a^2$, либо на $1 + a^4$, либо на

$1 + a^8$. Поэтому, если мы возьмем хотя бы пять чисел, то среди них найдутся два, делящиеся на одно и то же число, большее 1; значит, они не будут взаимно просты. Итак, оставшихся чисел не более четырех.

Осталось показать, что четыре числа могли остаться. Действительно, если $a = 2$, то можно оставить числа $1 + 2 = 3$, $1 + 2^2 = 5$, $1 + 2^4 = 17$ и $1 + 2^8 = 257$. Все они попарно взаимно просты.

Замечание. Можно показать, что при любом чётном a числа $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^4, 1 + a^8$ буду попарно взаимно просты.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

Доказано, что на доске не могло остаться больше четырёх чисел — 5 баллов.

Показано, что на доске могли остаться четыре числа — 2 балла.

10.7. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами? (*Б. Трушин*)

Ответ. При всех n, кратных трём.

Решение. Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа — те, которые были чёрными. Заметим, что если какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того, чтобы клетка первого типа стала чёрной, её нужно перекрасить $3k + 1$ раз при некотором целом k (для разных клеток k может быть разным). Значит, если a — количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K + a$ при некотором целом K. Чтобы клетка второго типа стала белой, её нужно перекрасить $3m+2$ раза. Значит, если b — количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M + 2b$ раз.

Далее, в любом квадрате 2×2 клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Поэтому $3K+a = 3M+2b$, откуда $a+b = 3(M-K+b)$, то есть общее количество клеток $a + b$ делится на три. Значит n^2 кратно трем, а поэтому и n кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты 3×3. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая — либо угловые клетки белые, либо чёрные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае — по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

Замечание. В доказательстве того, что n делится на 3, можно рассматривать не все n^2 клеток, а n клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду, скажем, n клеток, примыкающие к нижней стороне.

Комментарий. Доказано, что n должно делиться на 3 — 4 балла.

Приведен пример, показывающий, что при n, делящемся на 3, условие задачи выполнимо — 2 балла.

Рассмотрены лишь несколько небольших значений n — 0 баллов.

10.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

(*В. Шмаров*)

Решение. Так как SO — диаметр, то $\angle SCA = \angle SCO = \angle SDO = \angle SDB = 90°$. Для решения достаточно доказать подобие прямоугольных треугольников SCA и SDB. Действительно, из подобия будет следовать равенство углов $\angle CSA = \angle DSB$, откуда $\angle BSC = \angle CSA - \angle ASB = \angle DSB - \angle ASB = \angle ASD$.

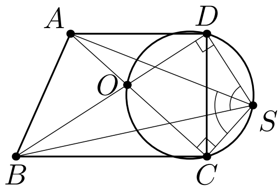
Рис. 2

Итак, достаточно показать, что $\frac{AC}{BD} = \frac{SC}{SD}$. Из прямоугольных треугольников ADC и BCD имеем $\frac{AC}{BD} = \frac{CD}{\cos\angle OCD} : \frac{CD}{\cos\angle ODC} = \frac{\cos\angle ODC}{\cos\angle OCD}$. Так как $\angle OCD = 90^\circ - \angle SCD$, то $\cos\angle OCD = \sin\angle SCD$. Аналогично $\cos\angle ODC = \angle\sin SDC$. Отсюда $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\angle SDC}{\sin\angle SCD} = \frac{SC}{SD}$ (последнее равенство следует из теоремы синусов), откуда и следует требуемое подобие.

Комментарий. Найдены прямые углы $\angle SCO = \angle SDO$ — 0 баллов.

Задача сведена к подобию прямоугольных треугольников SCA и SDB — 3 балла.

Доказано подобие прямоугольных треугольников SCA и SDB — не менее 5 баллов.

11 класс

11.5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$. (*В. Сендеров*)

Решение. При $n = 1$ неравенство верно, ибо $0 < 1$. Пусть $n > 1$. Заметим, что $0 < n-1 < n+1$, поэтому
$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < (n-1)^n(n+1)^n = (n^2-1)^n < (n^2)^n = n^{2n}$,
что и требовалось доказать.

Комментарий. Только разбор конкретных значений n — 0 баллов.

11.6. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы — ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что $m \neq n$. Всего в турнире с участием 73 команд проводится $\frac{73 \cdot 72}{2} = 36 \cdot 73$ игр. Пусть x команд одержали по n побед, а остальные $73 - x$ команд — по m побед. Тогда получаем равенство $x \cdot n + (73 - x) \cdot m = 36 \cdot 73$, откуда $x \cdot (n - m) = (36 - m) \cdot 73$. Число 73 — простое, поэтому на него делится либо множитель x, либо множитель $n - m$. Первое невозможно, так как $x < 73$. А второе невозможно, так как $n < 73, m < 73$, следовательно, $0 < |n - m| < 73$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

11.7. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

(*И. Богданов*)

Решение. Пусть для определённости $a > b$.

Если (x_0, y_0) — одна из точек пересечения, то $\sin ax_0 - \sin bx_0 = 0$, или

$$\sin \frac{a-b}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+b}{2} x_0 = 0.$$

Значит, $\frac{a-b}{2}x_0 = k\pi$ или $(a+b)x_0 = (2k+1)\pi$ при некотором целом k, откуда следует, что одно из чисел $\frac{a-b}{2\pi}x_0$ или $\frac{a+b}{\pi}x_0$ целое.

Подберём теперь число c такое, чтобы во всех таких точках число $\frac{a-c}{2\pi}x_0$ также было целым; тогда в этих точках мы будем иметь

$$\sin\frac{a-c}{2}x_0 \cdot \cos\frac{a+c}{2}x_0 = 0,$$

или $\sin cx_0 = \sin ax_0 = y_0$, что и требуется.

Для этого достаточно положить, например, $c = 2(a^2-b^2)+a$. Действительно, тогда число $\frac{a-c}{2\pi}x_0 = (b-a)\cdot\frac{b+a}{\pi}x_0 = 2(b+ +a)\cdot\frac{b-a}{2\pi}x_0$ в целое число раз больше каждого из чисел $\frac{a-b}{2\pi}x_0$ и $\frac{a+b}{\pi}x_0$, то есть является целым. Кроме того, $c > a > b$. Это и означает, что c удовлетворяет требованиям.

11.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = = 180^\circ$. (*И. Богданов, К. Кноп*)

Первое решение. Обозначим через $f(ABCD)$ сумму четырёх углов в условии. Заметим, что если четырёхугольник $ABCD$ вписан, то утверждение верно. Действительно, тогда $f(ABCD) = (\angle BAC + \angle CAD) + (\angle DCA + \angle ACB) = \angle BAD + + \angle BCD = 180^\circ$.

Пусть теперь четырёхугольник не вписан. Тогда описанная окружность треугольника BCD пересекает прямую AC вторично в точке $A' \neq A$. Заметим, что $f(A'BCD) - f(ABCD) = = (\angle BA'C - \angle BAC) + (\angle A'DB - - \angle ADB) = \pm(\angle ABA' - \angle ADA')$, где знак перед последней скобкой зависит от порядка точек A, A' на прямой AC.

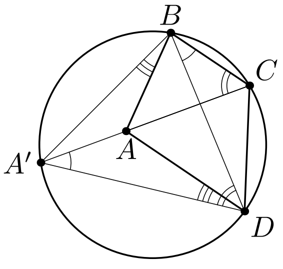

Рис. 3

Поскольку $f(A'BCD) = 180^\circ$, нам достаточно доказать, что $\angle ABA' = \angle ADA'$.

По условию, мы имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = k$. Пусть радиус описанной окружности четырёхугольника $A'BCD$ равен R. Тогда по теореме синусов $2R = \frac{BC}{\sin BA'C} = \frac{CD}{\sin CA'D}$; умножая последнее равенство на k, получаем $\frac{AB}{\sin AA'B} = \frac{AD}{\sin AA'D}$. Применяя теорему синусов к треугольникам ABA' и ADA', получаем $\frac{AA'}{\sin ABA'} = \frac{AB}{\sin AA'B} = \frac{AD}{\sin AA'D} = \frac{AA'}{\sin ADA'}$. Итак, $\sin ABA' = \sin ADA'$, то есть либо углы $\angle ABA'$ и $\angle ADA'$ равны, либо их сумма равна 180°. Наконец, второй случай невозможен; действительно, сумма углов невыпуклого четырёхугольника $ABA'D$ равна 360°, поэтому $\angle ABA' + \angle ADA' < 180^\circ$.

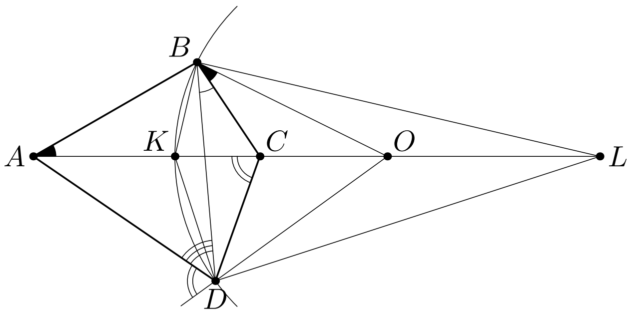

Рис. 4

Второе решение. Из условия следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Если эти отношения равны 1, то треугольники ABC и ADC равнобедренные, и четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD; значит, $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = \angle BAC + \angle ABD + \angle DAC + \angle ADB = \angle ABD + \angle ADB + \angle DAB = 180^\circ$, что и требовалось.

Пусть теперь, для определённости, $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} > 1$. Пусть BK и BL — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ABC (см. рис. 4). Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$; значит, DK и DL — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ADC. Отсюда следует, что $\angle KBL = \angle KDL = 90^\circ$, и четырёхугольник $BKDL$ вписан в окружность с центром в точке O — середине отрезка KL.

Из равнобедренного треугольника OKB получаем $\angle OBK = \angle OKB = \angle ABK + \angle KAB = \angle CBK + \angle CAB$, откуда

$\angle CAB = \angle OBK - \angle CBK = \angle OBC$. Значит, $\angle CAB + \angle CBD = \angle OBC + \angle CBD = \angle OBD$. Аналогично, из равнобедренного треугольника ODK получаем $\angle ODA = \angle ODK + \angle KDA = \angle OKD + \angle CDK = 180^\circ - \angle DCK$, откуда $\angle DCA + \angle ADB = (180^\circ - \angle ODA) + \angle ADB = 180^\circ - \angle ODB$.

Итак, сумма всех четырёх углов в условии равна $\angle OBD + 180^\circ - \angle ODB = 180^\circ$, поскольку треугольник OBD равнобедренный. Это и требовалось доказать.

Комментарий. Замечено, что для вписанного четырёхугольника указанная сумма углов равна 180° — 1 балл.