Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXIV
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2011

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

☞ Председатель оргкомитета LXXIV ММО

член-корреспондент РАН *Д. В. Трещёв*

☞ Сборник подготовили:

А. А. Авилов, *А. В. Акопян*, *В. Б. Алексеев*, *В. Д. Арнольд*, *А. Г. Банникова*, *А. В. Бегунц*, *М. А. Берштейн*, *А. Д. Блинков*, *Ю. А. Блинков*, *П. А. Бородин*, *В. В. Буланкина*, *Е. Ю. Бунькова*, *М. А. Волчкевич*, *П. Л. Вытнова*, *В. В. Галатенко*, *А. И. Галочкин*, *Е. Б. Гладкова*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *А. И. Гольберг*, *Н. Б. Гончарук*, *В. Е. Горин*, *Д. В. Горяшин*, *А. В. Грибалко*, *В. А. Гурвич*, *Г. Г. Гусев*, *С. А. Дориченко*, *А. Д. Елагин*, *М. Е. Жуковский*, *П. И. Захаров*, *А. А. Заславский*, *Ф. А. Ивлев*, *А. Л. Канунников*, *Т. В. Караваева*, *В. А. Клепцын*, *О. Н. Косухин*, *В. А. Кошелев*, *Ю. Г. Кудряшов*, *А. Б. Купавский*, *И. Б. Мамай*, *С. В. Маркелов*, *Г. А. Мерзон*, *Д. В. Мусатов*, *В. В. Немиро*, *Н. М. Нетрусова*, *Х. Д. Нурлигареев*, *А. В. Окунев*, *В. С. Панфёров*, *Е. А. Поршнев*, *А. М. Райгородский*, *М. А. Раскин*, *И. В. Раскина*, *А. И. Сгибнев*, *Д. В. Селегей*, *И. Н. Сергеев*, *В. А. Сиволобов*, *Н. П. Стрелкова*, *Ю. А. Устиновский*, *В. Г. Ушаков*, *Л. Е. Федулкин*, *Е. М. Федулкина*, *Р. М. Фёдоров*, *Б. Р. Френкин*, *П. В. Халипов*, *А. В. Хачатурян*, *А. А. Чернов*, *В. Г. Чирский*, *И. А. Шанин*, *А. В. Шаповалов*, *В. З. Шарич*, *И. А. Шейпак*, *Д. Э. Шноль*, *Д. Е. Щербаков*, *М. В. Юмашев*, *И. В. Ященко*

☞ Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. «А это вам видеть пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано?

(*А. В. Шаповалов*)

2. Разрежьте квадрат 6×6 клеточек на трёхклеточные уголки (рис. 1) так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3 клеточки. (*В. А. Клепцын*)

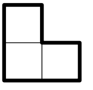


Рис. 1

3. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;
б) в ворота «Юга» забьют;
в) «Север» выиграет;
г) «Север» не проиграет;
д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч?

(*Л. Е. Федулкин*, *Е. М. Федулкина*)

4. Найдите все решения ребуса

$$Я + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН = МЫ.$$

(Одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными — разные.) (*Д. Э. Шноль*)

5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя

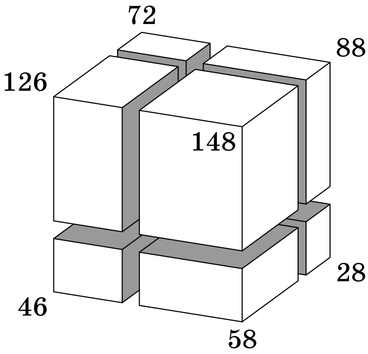


Рис. 2

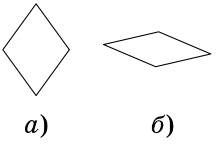


Рис. 3

бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? **(***А. В. Шаповалов***)**

6. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рис. 2 у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска? **(***А. В. Шаповалов***)**

7 класс

1. Ниже (рис. 4) приведён фрагмент мозаики, которая состоит из ромбиков двух видов: «широких» (рис. 3, *а*) и «узких» (рис. 3, *б*). Нарисуйте, как по линиям мозаики

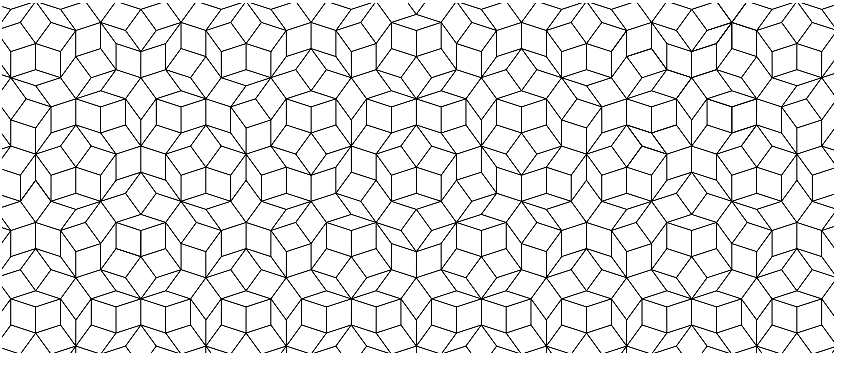


Рис. 4

вырезать фигуру, состоящую ровно из 3 «широких» и 8 «узких» ромбиков. (Фигура не должна распадаться на части.)

(*М. А. Раскин*)

2. Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку. Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались неполитыми.

Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки? (*А. В. Шаповалов*)

3. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч?

(*Л. Е. Федулкин*, *Е. М. Федулкина*)

4. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны

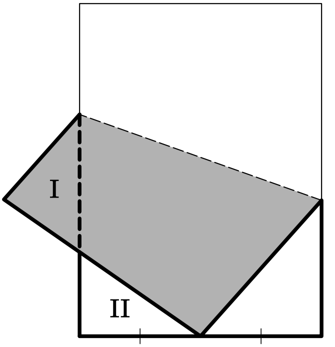


Рис. 5

(рис. 5). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8. (*А. В. Хачатурян*)

5. В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.) (*А. И. Сгибнев, Е. Б. Гладкова*)

6. Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4. В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел. (Одно число может быть отмечено несколько раз.) Могли ли оказаться отмечены

а) все числа, кроме, быть может, двух?

б) все числа, кроме, быть может, одного?

в) все числа? (*А. В. Шаповалов*)

8 класс

1. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 6) лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, ..., в F — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены? (*А. В. Шаповалов*)

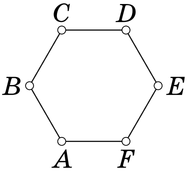


Рис. 6

2. Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра? (*А. В. Хачатурян*)

3. Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника? (*Н. П. Стрелкова*)

4. Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечётного числа сторон клеток квадрата 100×100, соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток? (*А. В. Шаповалов*)

5. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$. (*М. А. Волчкевич*)

6. В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$. (*R. B. Bapat*)

9 класс

1. Что больше:

$$2011^{2011} + 2009^{2009} \text{ или } 2011^{2009} + 2009^{2011}?$$

(*Р. М. Фёдоров*)

2. В турнире каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается? (*Б. Р. Френкин*)

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30°. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны. (*Ю. А. Блинков*)

4. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящих 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух

оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011?
(*Т. И. Голенищева-Кутузова, В. А. Клепцын*)

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$. (*А. В. Акопян*)

6. На доске выписано $(n-1)n$ выражений: $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, ..., $x_1 - x_n$, $x_2 - x_1$, $x_2 - x_3$, ..., $x_2 - x_n$, ..., $x_n - x_{n-1}$, где $n \geqslant 3$. Лёша записал в тетрадь все эти выражения, их суммы по два различных, по три различных и т. д. вплоть до суммы всех выражений. При этом Лёша во всех выписываемых суммах приводил подобные слагаемые (например, вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)$ Лёша запишет $x_1 - x_3$, а вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)$ он запишет 0). Сколько выражений Лёша записал в тетрадь ровно по одному разу? (*А. В. Лебедев*)

10 класс

1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее, в свою очередь, меньше, чем количество чисел, делящихся на 10? (*Т. В. Караваева, Б. Р. Френкин*)

2. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину. (*Б. Р. Френкин*)

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника. (*А. А. Заславский*)

4. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трёх своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у

Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих — сможет? (*А. В. Грибалко*)

5. Куб разбит на прямоугольные параллелепипеды так, что для любых двух параллелепипедов их проекции на некоторую грань куба перекрываются (то есть пересекаются по фигуре ненулевой площади). Докажите, что для любых трёх параллелепипедов найдётся такая грань куба, что проекции каждых двух из них на эту грань не перекрываются. (*В. А. Гурвич, А. И. Гольберг*)

6. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 4 гения. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает приём, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять по крайней мере 3 гениев, как бы ни действовала первая фирма? (*А. В. Шаповалов*)

11 класс, первый день

1. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии? (*О. Н. Косухин*)

2. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$. (*О. Н. Косухин*)

3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M

так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$. (*П. А. Бородин*)

4. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

1) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

2) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$. (*R. B. Bapat*)

5. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции? (*О. Н. Косухин*)

6. Продавец хочет разрезать кусок сыра на части, которые можно будет разложить на две кучки равного веса. Он умеет разрезать любой кусок сыра в одном и том же отношении $a : (1 - a)$ по весу, где $0 < a < 1$. Верно ли, что на любом промежутке длины 0,001 из интервала (0; 1) найдётся значение a, при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов? (*А. В. Шаповалов*)

11 класс, второй день

1. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы её начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)? (*Фольклор, А. Л. Канунников, И. Н. Сергеев*)

2. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нём не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321? (*П. А. Бородин*)

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что

$$\angle ABO = \angle CAO, \quad \angle BAO = \angle BCO, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

Найдите отношение $AC : OC$. (*И. Н. Сергеев*)

4. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots, 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}$$

будет наибольшим? (*О. Н. Косухин*)

5. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остаётся только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определённом направлении, причём так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков. (*Фольклор*)

6 класс

1. Ответ: 22 ученика.

Решение. То, что видеть пока рано, две трети девочек увидели правым глазом, а две трети мальчиков — левым. Всего, стало быть, один глаз не закрыли две трети всех учеников — 22 человека.

2. Решение. См. рис. 7. Решение единственно с точностью до симметрии.

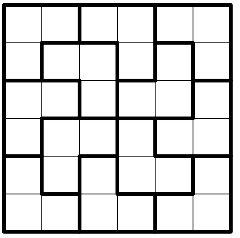


Рис. 7

3. Ответ: 1:2.

Решение. Поскольку ровно 3 прогноза верны, ровно 2 прогноза неверны.

Разберёмся сначала, какая из команд выиграла. Предположим, что «Север» выиграл. Тогда 4 прогноза («а», «б», «в» и «г») оказались верными, что противоречит условию.

Предположим, что матч закончился ничьей; тогда заведомо неверны прогнозы «а», «в» и «д» (так как при ничьей количество забитых голов чётно). Таким образом, верными оказались не более двух прогнозов, что также противоречит условию.

Итак, этот матч «Север» проиграл. Тогда прогнозы «в» и «г» неверны. Значит, все оставшиеся 3 прогноза верны. А именно: ничьей не было, в ворота «Юга» забили, и в матче было забито ровно 3 гола. Но тогда «Юг» забил 2 гола, то есть матч закончился со счётом 1:2.

4. Ответ: $0+12+12+12+12+12+12+12+12=96$.

Решение. Так как $8 \cdot ОН < 100$, то $ОН \leqslant 12$, то есть $О=1$, а Н равно 0 или 2. Но Н не может быть равно 0, так как тогда Я и Ы означали бы одну и ту же цифру. Значит, $Н=2$. Таким образом, $8 \cdot ОН = 8 \cdot 12 = 96$, значит, МЫ может быть равно 96, 97 или 98. Два последних случая не подходят, так как для них Я должно быть равно 1 или 2, а эти цифры уже использованы. Значит, $МЫ=96$, а $Я=0$.

5. Р е ш е н и е. Каждый гном видит все колпаки, кроме двух: своего и спрятанного. Надо договориться, какой из двух цветов назвать. Это можно сделать, например, так.

Пронумеруем цвета числами от 1 до 7 (например, в том же порядке, как и цвета радуги) и заранее расположим их по кругу (рис. 8). Каждый гном должен назвать тот из двух цветов, от которого до другого цвета ближе добраться по часовой стрелке. Тогда три гнома угадают, а три других ошибутся. Например, если спрятан колпак цвета 1, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 2, 3 и 4.

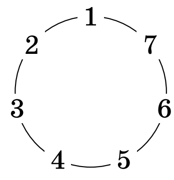


Рис. 8

Можно действовать и по-другому. Если гном не видит два цвета одной чётности, то он называет цвет с бо́льшим номером, а если цвета́, которые он не видит, имеют разную чётность, то он называет меньший номер. Какой бы цвет ни имел спрятанный колпак, его назовут ровно три гнома. Например, если спрятан колпак цвета 3, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 1, 4 и 6. Остальные случаи можно разобрать аналогично.

К о м м е н т а р и и. 1. Принцип действия гномов, изложенный во втором решении, применяется в однокруговых шахматных турнирах с нечётным количеством участников, для того чтобы каждый шахматист сыграл белым и чёрным цветом одинаковое количество партий. А именно, каждый участник турнира получает свой номер, и если встречаются шахматисты с номерами одной чётности, то белыми играет тот, у кого больше номер, а если номера участников имеют разную чётность, белыми играет тот, у кого номер меньше. Можно убедиться, что в этом случае каждый шахматист проведёт белыми и чёрными одинаковое количество партий.

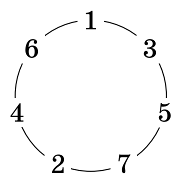


Рис. 9

2. Строго говоря, второе решение отличается от первого только нумерацией цветов. Если расположить цвета по кругу, как на рис. 9, то принцип действия гномов из первого решения в точности описывает второе.

3. Можно доказать, что никакая договорённость не позволит наверняка угадать цвет спрятанного колпака более чем половине гномов.

6. Ответ: 22.

Решение. У каждого малого бруска поверхность распилов составляет половину всей его поверхности. Будем считать только её. Раскрасим малые бруски в чёрный и белый цвета, как на рис. 10 (невидимый брусок — чёрный). Тогда каждые два одинаковых соприкасающихся на распиле прямоугольника — разного цвета. Поэтому сумма площадей чёрных распилов равна сумме площадей белых. А тогда и сумма площадей поверхностей белых брусков равна сумме площадей поверхностей чёрных. Отсюда площадь поверхности невидимого чёрного бруска равна

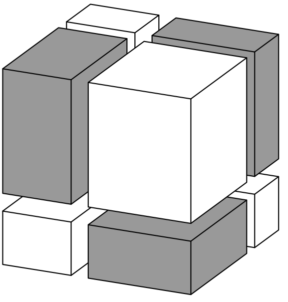


Рис. 10

$$(148 + 46 + 72 + 28) - (88 + 126 + 58) = 22.$$

7 класс

1. Ответ: некоторые решения приведены на рис. 11.

Комментарии. 1. Объясним, как можно было найти эти решения.

Нам надо включить в нашу фигуру намного больше узких ромбов, чем широких, а широких ромбиков на картинке явно больше (см. также комментарий 3).

Нетрудно убедиться, что каждый узкий ромб граничит не более чем с одним другим узким ромбом, а каждый широкий ромб — не более чем с двумя узкими. Для того чтобы соединить восемь узких ромбов (четыре пары) в один многоугольник, нам как раз придётся включить не меньше трёх широких.

Теперь мы можем заштриховать в некоторой области мозаики все пары граничащих узких ромбов, начать с какой-нибудь пары

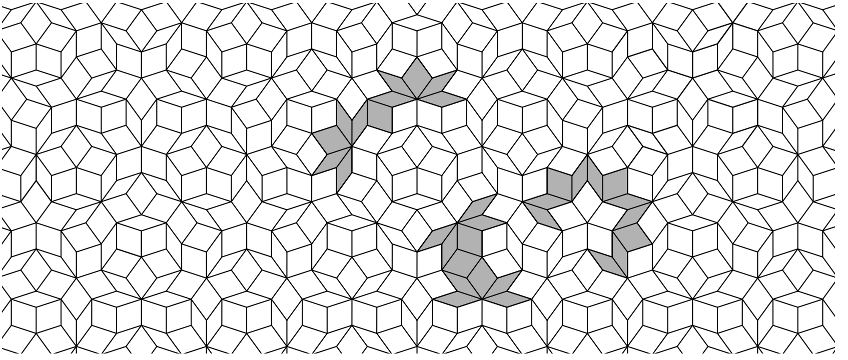


Рис. 11

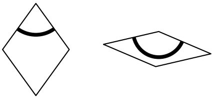


Рис. 12

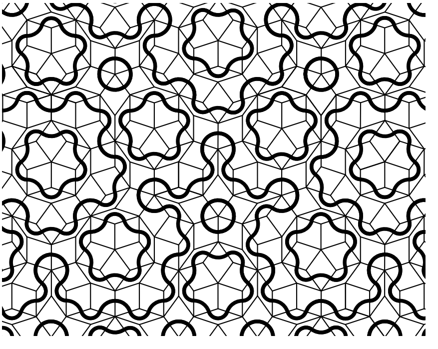


Рис. 13

и попытаться три раза добавить какой-нибудь широкий ромб, соединяющий выбранный кусок с ещё одной парой узких ромбов.

2. Нарисуем на ромбах дуги, как на рис. 12. *Мозаикой Пенроуза* называется замощение плоскости такими ромбами, при котором каждая дуга, приходящая на границу ромба, продолжается на соседнем ромбе (рис. 13). О фрагменте такой мозаики и идёт речь в задаче.

3. Если взять большой лист бумаги, нарисовать на нём фрагмент мозаики Пенроуза и посчитать все нарисованные ромбы, то широких ромбов будет примерно в 1,6 раз больше. (На самом деле это отношение будет примерно равняться *золотому сечению* — тем ближе к нему, чем больше лист бумаги.)

2. О т в е т: 19 цветов.

Р е ш е н и е. Неполитыми осталось 10 цветов, значит, полито было $30 - 10 = 20$ цветов. Рассмотрим последний политый Синеглазкой тюльпан. Так как всего тюльпанов 15, за этим тюльпаном идёт ещё $15 - 10 = 5$ тюльпанов.

Поэтому Незнайка сорвёт эти 5 тюльпанов и закончит рвать цветы как раз на последнем политом Синеглазкой тюльпане. Но это значит, что все остальные политые цветы уцелели, то есть уцелело $20 - 1 = 19$ цветов.

3. См. решение задачи 3 из варианта 6 класса.

4. Ответ: 12.

Решение. Отметим равные отрезки (рис. 14 — здесь мы пользовались тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна $a + b + 4$, а длина меньшей стороны равна $a + b$. Значит, $a + b = 8$, и бо́льшая сторона имеет длину $a + b + 4 = 8 + 4 = 12$.

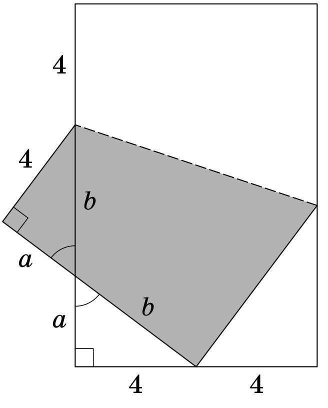


Рис. 14

Комментарий. Применив теорему Пифагора, можно найти длины сторон треугольников I и II. Оказывается, это *египетские* треугольники — треугольники со сторонами 3, 4 и 5.

5. Ответ: нет.

Решение. В слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ» буква Е встречается 4 раза, а остальные 9 букв встречаются по одному разу. Это значит, что в числе все 10 цифр будут присутствовать по одному разу, а какая-то одна цифра (соответствующая букве Е) — ещё 3 раза сверх того.

Сумма 10 цифр от 0 до 9 равна 45, т. е. кратна 3. Сумма трёх одинаковых цифр также кратна 3. Тем самым, как бы мы ни заменяли в слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ» буквы на цифры, сумма цифр полученного числа будет кратна трём. Значит, по признаку делимости на 3 и полученное число будет делиться на 3.

Поскольку единственное простое число, делящееся на 3, — это само число 3, а наше число заведомо его больше, полученное число не может быть простым.

6. Ответ: а) да; б) да; в) нет.

Решение. Заметим, что числа в углах будут отмечены в любом случае — это числа, стоящие на диагоналях длины 1. Среди остальных чисел есть хотя бы одно неотмеченное. Действительно, рассмотрим наименьшее из чисел, не стоящих в углах. Оно не отмечено, так как на каждой линии вместе с ним есть и другие «неугловые» числа. Значит, все числа отмечены быть не могут.

4	10	9	3
11	16	15	8
12	13	14	7
1	5	6	2

Рис. 15

На рис. 15 приведён пример таблицы, в которой будут отмечены все числа, кроме одного.

Комментарий. Искать этот пример можно было, например, следующим образом. Будем расставлять числа по одному в порядке возрастания.

Чтобы число 1 было отмечено, необходимо поставить его на диагональ длины 1, то есть в угол. Аналогично числа 2, 3 и 4 придётся (если мы хотим, чтобы они были отмечены) поставить в углы (рис. 16).

4			3
1			2

Рис. 16

Теперь, куда бы мы ни поставили число 5, отмечено оно не будет (сравните с доказательством

4	4			3
3				
2				
1	1	5		2
	A	B	C	D

Рис. 17

4	4	10	9	3
3	11			8
2	12			7
1	1	5	6	2
	A	B	C	D

Рис. 18

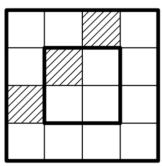


Рис. 19

того, что все числа отмечены быть не могут). Поставим его, например, в клетку B1 (рис. 17).

Чтобы число 6 было отмечено, необходимо поставить его на одну линию с числом 5 — например, в клетку C1. Далее, число 7 нужно поставить на одну линию с числами 5 или 6 и т. д. — всего этого можно добиться, расставив числа от 5 до 12 по кругу в клетках на границе квадрата (рис. 18).

Оставшиеся 4 самых больших числа можно уже расставлять в центральном квадрате как угодно, так как каждое из них будет максимальным на диагонали длины 3, не содержащей других чисел из центрального квадрата (рис. 19).

8 класс

1. Решение. Положим на левую чашу весов шарики из вершин A и E, а на правую — из вершин B и D. Если шутник поменял местами шарики в вершинах A и D, то на левой чаше будет лежать груз массой $4+5=9$ грамм, а на правой — $1+2=3$ грамма, и левая чаша перевесит. Если он поменял местами шарики в вершинах B и E, то на левой и правой чаше будет лежать $1+2=3$ и $4+5=9$ грамм соответственно, то есть правая чаша перевесит. Наконец, если он поменял местами шарики в вершинах C и F, то на чашах будет лежать $1+5=6$ и $2+4=6$ грамм, то есть весы будут в равновесии. Таким образом, по положению весов можно определить, какие шарики поменял местами шутник.

2. Ответ: на 9 лет.

Решение. Пусть Пётр и Павел родились в $\overline{18xy}$ и $\overline{19uv}$ году соответственно (x, y, u и v — цифры в записи числа). Во время их встречи Петру и Павлу было $1+8+x+y$ лет и $1+9+u+v$ лет соответственно. Определим двумя способами год, в котором произошла встреча. Поскольку возраст Петра на тот момент был равен сумме цифр его года рождения, встреча произошла в $1800+10x+y+9+x+y$ году. С другой стороны, и возраст Павла был равен сумме цифр его года рождения, а значит, встреча произошла в $1900+10u+v+10+u+v$ году. Получаем уравнение

$$1800+10x+y+9+x+y=1900+10u+v+10+u+v.$$

После упрощений уравнение преобразуется к виду

$$11(x-u)+2(y-v)=101,$$

где $x-u$ и $y-v$ — целые числа, не превосходящие по модулю 9. Перепишем его в виде

$$11(x-u)+2(y-v-1)=99.$$

Заметим, что 99 делится на 11 и $11(x-u)$ делится на 11, а потому и $y-v-1$ должно делиться на 11. Так как $-9 \leqslant y-v \leqslant 9$, то $y-v=1$. Следовательно, $x-u=9$. Павел старше Петра на

$$1900+10u+v-1800-10x-y=$$
$$=100-10(x-u)-(y-v)=100-90-1=9 \text{ лет.}$$

Формально надо разобрать ещё два случая: Пётр мог родиться в 1900 году (который тоже относится к XIX веку), или Павел мог родиться в 2000 году. В первом случае встреча состоялась бы обязательно в 1910 году, значит, Павел родился не раньше 1901 и не позже 1910 года, и ему по условию задачи в момент встречи не могло быть меньше 11 лет, противоречие. Во втором случае встреча состоялась бы в 2002 году, и Петру на тот момент было бы не меньше 102 лет, чего также не может быть, так как сумма цифр любого целого числа от 1801 до 1900 не больше 27.

3. О т в е т: да, существует.

Р е ш е н и е. На рисунке 20 приведён шестиугольник, который разрезается на четыре прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5.

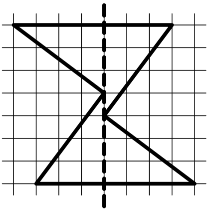


Рис. 20

К о м м е н т а р и й. Заметим, что существенно других примеров не бывает: любой шестиугольник, удовлетворяющий условию задачи, должен быть составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников, приставленных друг другу так же, как и на рисунке 20.

4. О т в е т: нет, не может.

Р е ш е н и е. Предположим, что ломаная, обладающая указанными свойствами, существует. Рассмотрим ту из сторон квадрата, которой не принадлежит ни один из концов ломаной. Если такой стороны нет, т. е. ломаная идёт из одного угла квадрата в другой, то рассмотрим ту из сторон, вдоль которой направлено первое звено ломаной (рис. 21). Каждый из узлов этой стороны принадлежит некоторому (причём ровно одному) звену ломаной, идущему вдоль стороны квадрата. Действительно: если узел не является концом ломаной, то есть два звена, его содержащие, и одно из них обязано идти вдоль стороны. Если же узел является концом ломаной, то выполнение этого свойства гарантировано выбором стороны.

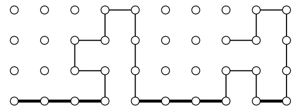


Рис. 21

Так как длина каждого звена нечётна, то каждому звену принадлежит чётное число узлов, следовательно, и общее число узлов на стороне квадрата должно быть чётным. Однако это число равно 101. Получившееся противоречие показывает, что наше предположение было неверным, и требуемой ломаной действительно не существует.

5. Решение. Обозначим через Q середину стороны AD (рис. 22). Заметим, что прямая MQ параллельна прямой BD, а прямая QN параллельна прямой AC, так как это средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно. Поэтому отрезки MP и NP будут высотами в треуголь-

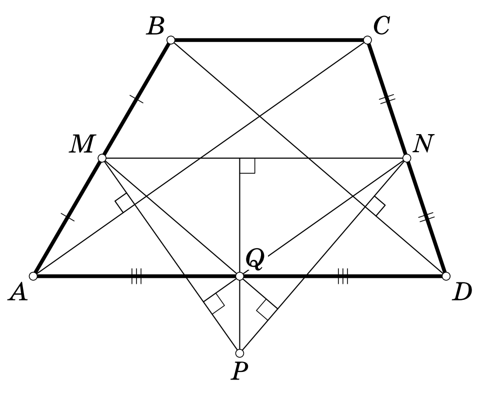


Рис. 22

нике MNQ, а точка P — его ортоцентром. Значит, прямая QP перпендикулярна прямой MN. Поскольку прямая MN параллельна прямой AD, получаем, что PQ перпендикулярна AD, а значит, является серединным перпендикуляром. Следовательно, $PA = PD$.

6. Решение. Количество строк и столбцов в таблице мы будем обозначать через n. Докажем сначала, что a не может быть больше b. Пусть $a > b$. Рассмотрим n чисел A_1, ..., A_n, которые являются наибольшими в строках 1, ..., n. Через B_1, ..., B_n обозначим вторые по величине числа в строках 1, ..., n. Тогда по условию $A_i + B_i = a$ для любого i. Так как $A_i \geqslant B_i$, то $A_i \geqslant a/2$ для любого i.

Докажем, что никакие два из чисел A_1, ..., A_n не могут стоять в одном столбце. Действительно, если два из них стоят в одном столбце, то их сумма, с одной стороны, меньше b (меньше суммы двух самых больших чисел в столбце), а с другой стороны — не меньше $a/2 + a/2 = a$. Отсюда получаем $a < b$, что противоречит предположению.

Итак, эти n чисел стоят в разных столбцах, то есть по одному в каждом столбце. Пусть из чисел A_1, ..., A_n число A_k самое маленькое. В том столбце, где стоит число B_k, находится также одно из чисел из набора A_1, ..., A_n. Назовём его A_l. Тогда $A_l \geqslant A_k$, так как A_k — наименьшее из набора A_1, ..., A_n. Поэтому $B_k + A_l \geqslant B_k + A_k = a$. Отсюда получаем, что сумма каких-то двух чисел, стоящих в одном столбце, не меньше a. С другой стороны, она не больше b. Поэтому $b \geqslant a$, а это противоречит предположению.

Аналогичным образом можно доказать, что b не может быть больше a. Значит, $a = b$.

9 класс

1. Ответ: $2011^{2011} + 2009^{2009} > 2011^{2009} + 2009^{2011}$.

Решение. Преобразуем разность левой и правой частей:

$$2011^{2011} + 2009^{2009} - (2011^{2009} + 2009^{2011}) =$$
$$= 2011^{2011} - 2011^{2009} - (2009^{2011} - 2009^{2009}) =$$
$$= 2011^{2009}(2011^2 - 1) - 2009^{2009}(2009^2 - 1).$$

Заметим, что $2011^{2009} > 2009^{2009} > 0$ и $2011^2 - 1 > 2009^2 - 1 > 0$. Следовательно, уменьшаемое больше вычитаемого, то есть разность положительна. Значит, $2011^{2011} + 2009^{2009} > 2011^{2009} + 2009^{2011}$.

2. Ответ: нет.

Решение. Пусть никто из трёх игроков не ошибся. Обозначим количество игроков через n, а количество арбитров через m. Упорядочим арбитров по количеству встреч, которые они судили. Тогда первый арбитр судил не менее 1 встречи, второй — не менее 2, ..., последний — не менее m. Следовательно, общее количество встреч не менее $1 + 2 + \ldots + m$. С другой стороны, общее количество встреч равно $\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$. Поэтому $m \leqslant n - 1$.

Поскольку все $n - 1$ встреч с участием Иванова судили разные арбитры, $m \geqslant n - 1$. Значит, $m = n - 1$, и все выписанные выше неравенства обязаны быть равенствами, то есть первый арбитр судил ровно 1 встречу, второй — ровно 2, ..., $(n-1)$-й — ровно $n - 1$.

Рассмотрим арбитра, который судил ровно одну встречу. Поскольку арбитров $n - 1$, а все встречи Иванова судили разные арбитры, этот арбитр судил одну из встреч Иванова. По тем же причинам он судил одну из встреч Петрова, а также Сидорова. Но в единственной встрече, которую он судил, участвовали только два игрока — противоречие.

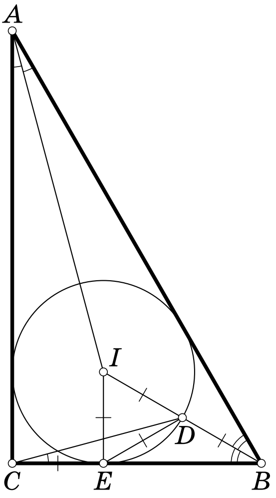


Рис. 23

3. Решение. Пусть E — точка касания вписанной окружности и стороны BC (рис. 23). Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис, следовательно, $\angle CAI = 15°$, $\angle ACI = \angle BCI = 45°$ и $\angle CBI = \angle ABI = 30°$. Таким образом, $\angle CIE = 90° - \angle ICE = 45° = \angle ICE$, то есть треугольник CEI равнобедренный прямоугольный, $CE = IE$.

В прямоугольном треугольнике IEB угол IBE равен 30°, значит, $\angle EIB = 60^\circ$. Далее, отрезки IE и ID равны как радиусы. Следовательно, треугольник IDE равносторонний.

Рассмотрим теперь треугольник CDE. По доказанному $CE = IE = DE$, то есть этот треугольник равнобедренный. Угол при вершине E равен

$$\angle CED = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - (90^\circ - \angle IED) = 150^\circ.$$

Следовательно, $\angle DCE = \dfrac{180^\circ - \angle CED}{2} = 15^\circ$.

Осталось заметить, что

$$\angle IAC + \angle ACD = 15^\circ + (90^\circ - \angle DCE) = 90^\circ,$$

а значит, прямые AI и CD перпендикулярны.

4. Ответ: да, существуют.

Решение. Приведём два примера возможных изначальных чисел и последовательностей преобразований (разумеется, для полного решения задачи достаточно привести всего один пример).

$$\begin{array}{ccccccccc}
25 & & 25 & & 25 & & 25 & & 25 \\
40 & & 40 & \xrightarrow{+50\%} & 60 & & 60 & & 60 \\
40 & \xrightarrow{+25\%} & 50 & & 50 & \xrightarrow{+60\%} & 80 & \xrightarrow{+25\%} & 100
\end{array}$$

Рис. 24

На рисунке 24 мы получили число 100. Заметим, что при увеличении на 100% число удваивается. Следовательно, увеличив, например, число 25 на 100% семь раз, мы получим число $25 \cdot 2^7 = 3200 > 2011$.

$$\begin{array}{ccccccc}
25 & & 25 & & 25 & & 25 \\
28 & & 28 & & 28 & & 28 \\
16 & \xrightarrow{+25\%} & 20 & \xrightarrow{+25\%} & 25 & \xrightarrow{+28\%} & 32
\end{array}$$

Рис. 25

На рисунке 25 за приведённые три операции число 16 увеличилось в два раза. Продолжая увеличивать третье число таким же образом (два раза на 25%, затем один раз на 28%), мы можем получить сколь угодно большое число.

К о м м е н т а р и й. Покажем (хотя это и не требуется для решения), из каких соображений можно придумать второй из этих примеров. Заметим для начала, что увеличить число на $n\%$ — всё равно что умножить его на $\frac{100+n}{100}$. Поэтому результат увеличения числа x на $n\%$ будет целым, если и только если произведение $x(100+n)$ будет делиться на 100.

Допустим, что мы будем всё время увеличивать только одно из чисел. При каждом таком увеличении мы умножаем число на дробь со знаменателем 100; поэтому нам нужно позаботиться о том, чтобы итоговое число продолжало делиться на достаточно большие степени двойки и пятёрки. Значит, на достаточно большие степени двойки и пятёрки должны делиться числители дробей, на которые мы умножаем. Поскольку каждая отдельная дробь (соответствующая значениям $n \leqslant 40$) целой быть не может, естественно возникает идея «разделения обязанностей»: у части дробей числители будут делиться на большую степень двойки (но на недостаточную — пятёрки), а у части — наоборот.

На большую степень двойки делится, например, число $128 = 2^7$, а на большую степень пятёрки — число $125 = 5^3$. Используя дроби $\frac{128}{100} = \frac{2^5}{5^2}$ и $\frac{125}{100} = \frac{5}{2^2}$, уже несложно подобрать последовательность операций, приводящую к умножению на целое число:

$$\frac{5}{2^2} \cdot \frac{5}{2^2} \cdot \frac{2^5}{5^2} = 2.$$

Осталось выбрать начальное значение третьего числа таким, чтобы первые два шага не привели к дробным числам, и мы можем повторять увеличения на 25%, 25% и 28% циклически.

5. Р е ш е н и е. В первую очередь заметим, что $\angle ADB = \angle DBC$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD (рис. 26). С другой стороны, $\angle APB = 2\angle ADB$, поскольку в окружности, описанной около треугольника ABD, угол ADB вписанный, а угол APB центральный. Аналогично получим, что $\angle DQC = 2\angle DBC$, а значит,

$$\angle APB = 2\angle ADB = 2\angle DBC = \angle DQC.$$

Далее, поскольку $AP = PB$ и $DQ = QC$, треугольники APB и DQC подобны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle KAP = \angle KDQ$ и $AP : DQ = AB : DC$. Вместе с тем из теоремы о пропорциональных отрезках $AK : DK = AB : DC$,

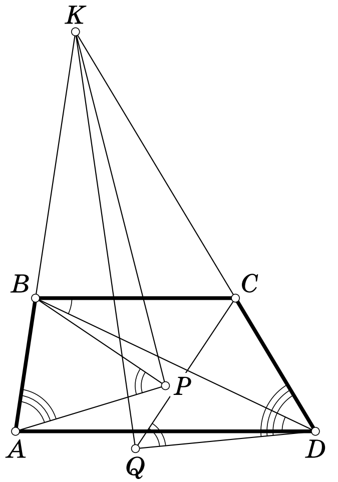


Рис. 26

поэтому треугольники APK и DQK подобны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда немедленно следует, что $\angle PKA = \angle QKD$.

6. Ответ: $n!$.

Решение. Все разности, выписанные *на доске*, разбиваются на пары противоположных: $x_1 - x_2$ с $x_2 - x_1$ и т. д. Если некоторая сумма не содержит ни разности $x_i - x_j$, ни разности $x_j - x_i$, то к этой сумме можно прибавить $(x_i - x_j) + (x_j - x_i)$ и получить сумму, равную исходной. Далее, если некоторая сумма содержит и слагаемое $x_i - x_j$ и слагаемое $x_j - x_i$, то можно их вычеркнуть и опять получить сумму, равную исходной. Итак, в каждой сумме, записанной в тетрадь ровно один раз, из каждой пары противоположных разностей встречается ровно одна.

Рассмотрим одну из сумм, которые Лёша написал в тетрадь ровно один раз. Построим по ней *ориентированный граф*, вершинами которого являются переменные $x_1, \ldots, x_n$ и из вершины x_i ведёт ребро в вершину x_j тогда и только тогда, когда в рассматриваемую сумму входит разность $x_i - x_j$. В предыдущем абзаце мы показали, что между любыми двумя вершинами проведено ровно одно из двух возможных рёбер (или $x_i \to x_j$, или $x_j \to x_i$, но не оба).

Заметим теперь, что построенный нами ориентированный граф не может содержать циклов, то есть таких последовательностей вершин x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}, что из каждой вершины ведёт ребро в следующую вершину, а из последней вершины — в первую. Действительно, иначе из суммы можно было бы вычеркнуть

$$(x_{i_1}-x_{i_2})+(x_{i_2}-x_{i_3})+\ldots+(x_{i_{k-1}}-x_{i_k})+(x_{i_k}-x_{i_1})$$

и получить сумму, равную исходной.

Поскольку в графе нет циклов, найдётся вершина, из которой не выходит ни одно ребро (иначе можно было бы выйти из произвольной вершины и, переходя каждый раз по какому-нибудь ребру, не более чем через n шагов прийти в вершину, в которой мы уже были). В графе без этой вершины опять найдётся вершина, из которой не выходит ни одно ребро, и т. д.

Пусть первая из построенных в предыдущем абзаце вершин — x_{i_1}, вторая — x_{i_2}, ..., последняя — x_{i_n}. Тогда сумма равна

$$\begin{aligned}(x_{i_1}-x_{i_2})+(x_{i_1}-x_{i_3})+\ldots+(x_{i_1}-x_{i_n})&+\\ +(x_{i_2}-x_{i_3})+\ldots+(x_{i_2}-x_{i_n})&+\\ \ldots&\\ +(x_{i_{n-1}}-x_{i_n})&=\\ =(n-1)x_{i_1}+(n-3)x_{i_2}+\ldots+(3-n)x_{i_{n-1}}+(1-n)x_{i_n}.&\end{aligned}$$

Осталось показать, что любая сумма такого вида встретится в тетради ровно один раз. Рассмотрим набор чисел, в котором $x_{i_1}>x_{i_2}>\ldots>x_{i_n}$. Для такого набора в рассматриваемую сумму вошли все положительные слагаемые и ни одного отрицательного слагаемого. Следовательно, для такого набора чисел все остальные суммы будут строго меньше. Значит, никакое другое записанное Лёшей выражение не может быть тождественно равно этой сумме.

Ясно, что количество таких сумм равно количеству перестановок n элементов (то есть количеству способов расставить n элементов в ряд), а стало быть, равно $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$.

К о м м е н т а р и й (для тех, кто знаком с линейной алгеброй). Обозначим через e_{ij} вектор в $\mathbb{R}^n$, у которого ровно две ненулевые компоненты: i-я компонента равна 1, а j-я равна -1. Тогда выражение $x_i - x_j$ соответствует вектору e_{ij} в следующем смысле: $x_i - x_j$ — это скалярное произведение e_{ij} и вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом сумме выражений соответствует сумма векторов и т. д. Исходную задачу можно переформулировать так: рассмотрим векторы e_{ij}, их суммы по два, по три и т. д. Сколько сумм встречается ровно один раз?

Итак, обозначим множество векторов e_{ij} через $\mathcal{R}$. Оно обладает следующими двумя свойствами, проверку которых мы оставляем читателю.

1. Если векторы α и β из $\mathcal{R}$ коллинеарны, то $\alpha = \pm\beta$.

2. Для $\alpha \in \mathcal{R}$ обозначим через H_α гиперплоскость (т. е. линейное подпространство размерности $n-1$), перпендикулярную α. Тогда множество $\mathcal{R}$ симметрично относительно H_α.

В общем случае конечное множество $\mathcal{R}$ ненулевых векторов евклидова пространства V, обладающее свойствами 1—2 и порождающее V, называется *системой корней.* Наше множество, однако, порождает не всё $\mathbb{R}^n$, а только гиперплоскость, заданную уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ (докажите!), поэтому оно является системой корней, но не в $\mathbb{R}^n$, а в этой гиперплоскости. Такую систему корней называют A_{n-1} ($n-1$ — размерность гиперплоскости).

Системы корней — очень важные объекты в математике и физике. Они появляются в разных областях, причём иногда связь между соответствующими задачами очень сложно установить. В качестве другого примера системы корней можно рассмотреть векторы, соответствующие $2n(n-1)$ выражениям $\pm x_i \pm x_j$ (система D_n), или векторы на плоскости, соответствующие вершинам правильного m-угольника (система $I_2(m)$). Попробуйте решить задачу, предлагавшуюся на олимпиаде, и для этих систем корней.

Читателю, который хочет узнать больше про системы корней (и их связь с предлагавшейся на олимпиаде задачей), мы рекомендуем замечательную брошюру Е. Ю. Смирнова «Группы Кокстера и правильные многогранники» (М.: МЦНМО, 2009. Эл. версия: `http://www.mccme.ru/~smirnoff/papers/dubna.pdf`).

10 класс

1. Ответ: да.

Решение. Рассмотрим арифметическую прогрессию с начальным членом 10 и разностью 40:

$$10, 50, 90, 130, 170, 210, 250, 290, \ldots$$

Начальный член не делится на 8, а разность делится. Значит, ни один член последовательности не делится на 8. По выписанному куску последовательности видно, что некоторые члены делятся на 9, а некоторые — нет. И наконец, ясно, что все члены последовательности делятся на 10.

2. Будем считать вертикальными доминошками те, которые лежат параллельно длинной стороне доски.

П е р в о е р е ш е н и е. Рассмотрим всю границу области, занятой вертикальными доминошками. Она состоит из замкнутых ломаных, проходящих по границам клеток. Ясно, что каждая из этих ломаных имеет чётную длину: если мы выберем любую точку такой ломаной и отправимся вдоль по ломаной, то, пройдя её всю, окажемся в той же точке. Значит, мы сделаем за это время поровну шагов вверх и вниз и поровну шагов влево и вправо.

Указанная граница складывается из границы вертикальных доминошек с горизонтальными и из той части границы доски, к которой примыкают вертикальные доминошки. Осталось доказать, что на границах доски вертикальные доминошки занимают чётное количество клеток. Но на вертикальных сторонах каждая примыкающая к ней вертикальная доминошка занимает по 2 клетки. На каждой горизонтальной стороне примыкающая к ней горизонтальная доминошка занимает 2 клетки, и, так как длина стороны чётна, для вертикальных доминошек остаётся чётное количество клеток, что и требовалось.

В т о р о е р е ш е н и е. Пусть всего на доске лежит n вертикальных доминошек. Поскольку периметр каждой доминошки равен 6, их суммарный периметр равен $6n$. С другой стороны, он складывается из трёх слагаемых: $6n = l_г + 2l_в + p$, где $l_г$ — длина границы вертикальных и горизонтальных доминошек, длина $l_в$ — границы вертикальных доминошек между собой, а p — длина границы вертикальных доминошек с периметром прямоугольника. Длина $l_в$ учитывается дважды, поскольку граница двух вертикальных доминошек даёт вклад в периметр обеих. Покажем, что p чётно. Действительно, граница вертикальных доминошек с вертикальными сторонами прямоугольника чётна, так как состоит из отрезков длины 2. Суммарная длина горизонтальных сторон прямоугольника равна $2 \cdot 2010$, то есть чётна. Часть горизонтальных сторон, граничащая с горизонтальными доминошками, имеет чётную длину, и поэтому граница вертикальных доминошек с горизонтальными сторонами прямоугольника тоже чётна. Таким образом, p чётно. Граница вертикальных доминошек с горизонтальными имеет длину $l_{\text{г}} = 6n - 2l_{\text{в}} - p$ и, следовательно, чётна.

3. О т в е т. 120°.

Р е ш е н и е. Продолжив луч BC до пересечения с описанной окружностью треугольника BB_1C_1, получим точку K (рис. 27). Вписанные углы $\angle C_1BB_1$ и $\angle KBB_1$ равны

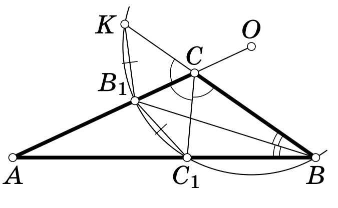


Рис. 27

(так как BB_1 — биссектриса), значит, равны дуги, на которые они опираются, $B_1C_1 = B_1K$. При этом точки K и C_1 лежат на окружности (описанной вокруг треугольника BB_1C_1), центр которой принадлежит прямой AC. Следовательно, K и C_1 симметричны друг другу относительно прямой AC. Получаем равенство трёх углов $\angle BCC_1 = \angle C_1CB_1 = \angle B_1CK$. Сумма этих углов равна 180°, стало быть, каждый из них равен 60°, и $\angle ACB = \angle BCC_1 + \angle C_1CB_1 = 120^\circ$.

К о м м е н т а р и и. 1. Легко показать, что центр O окружности может лежать только на продолжении отрезка AC за точку C и, значит, прямая BC пересекает окружность именно так, как показано на рисунке.

2. Возможны также решения, основанные на том, что точки B, C, O, C_1 лежат на одной окружности, или на том, что описанная окружность треугольника BC_1B_1 является окружностью Аполлония для точек A и C.

4. Ответ: да, можно.

Решение. Обозначим через $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$ длины палочек, которые наутро оказались у Винтика, а через $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3$ — длины палочек, которые оказались у Шпунтика. Винтик не может сложить из своих палочек треугольник, значит, $x_1 \geqslant x_2 + x_3$. Предположим, что и Шпунтик не может сложить треугольник: $y_1 \geqslant y_2 + y_3$. Тогда

$$x_1 + y_1 \geqslant x_2 + x_3 + y_2 + y_3.$$

Поскольку сумма длин всех шести палочек равна 2 метрам, получаем, что $x_1 + y_1 \geqslant 1$ м. Значит, длина какой-то из этих двух палочек не меньше 50 см. Но тогда она не может быть стороной треугольника с периметром 1 м, что противоречит условию.

5. Первое решение. Докажем, что это верно для разбиения любого прямоугольного параллелепипеда. Для краткости будем называть объемлющий параллелепипед ящиком, три его непараллельные грани — левой низом и фасадом, параллелепипеды разбиения — кирпичами, а разбиения, удовлетворяющие условию задачи, — правильными.

Лемма. Если разрезать ящик и кирпичи плоскостью, параллельной грани, то получим два меньших правильно разбитых ящика.

Доказательство. Если проекции двух кирпичей перекрывались на грани, параллельной разрезу, то проекции их кусков, попавших в один меньший ящик, не меняются и поэтому перекрываются. В противном случае пересечение проекций либо (а) было разбито разрезом, либо (б) было пустым. В случае (а) проекции кусков кирпичей перекрываются по соответствующей части пересечения проекций. В случае (б) один из кирпичей целиком попадает в один меньший ящик и перекрытие его проекции с проекцией соответствующего куска другого кирпича не меняется. □

Вернёмся к задаче. Допустим, что утверждение ложно. Тогда есть контрпример, и в нём найдутся такие три кирпича X, Y и Z, что у X и Y перекрываются проекции на низ, у X и Z — на левую грань, у Y и Z — на фасад. Выберем контрпример с наименьшим числом кирпичей. Допустим, что X и Y не соприкасаются. Можно считать, что Y выше X. Рассмотрим часть ящика в форме параллелепипеда между нижней гранью Y и верхней гранью X, проекция которой на низ совпадает с пересечением проекций X и Y. Эта часть не входит ни в X, ни в Y, ни в Z. Она принадлежит одному или нескольким кирпичам; пусть K — один из них. Посмотрим, на какой грани перекрываются проекции K и Z: на левой или на фасаде (низ, очевидно, не подходит). Если на левой, то K, Y и Z тоже служат контрпримером. Разрежем ящик плоскостью, проходящей по верхней грани X. В верхнем из получившихся ящиков лежат K, Y и часть Z, образуя контрпример. Но так как в этом ящике нет ни одной части от X, то в верхнем ящике кирпичей меньше, что противоречит минимальности контрпримера. Аналогично, если бы проекции K и Z перекрывались на фасаде, можно было бы получить меньший контрпример, отсекая верхнюю часть с Y.

Итак, X и Y соприкасаются, и, по аналогичным причинам, соприкасаются X с Z и Y с Z. Пусть M — общая точка X, Y и Z. Ими не покрыты два противоположно направленных октанта с вершиной M, и кирпичи из этих октантов не могут иметь перекрывающихся проекций — противоречие.

Второе решение (предложено участником олимпиады Александром Скутиным). Введём систему координат с началом в вершине куба и осями, параллельными его рёбрам. Вместо проекций на грани будем рассматривать проекции на координатные плоскости (назовём их нижней, передней и левой).

Заметим, что грани всех параллелепипедов должны быть параллельны координатным плоскостям. Заметим также, что два параллелепипеда могут перекрываться в проекции не более чем на одну плоскость: если они перекрываются хотя бы на двух, то перекрываются проекции на все три оси, а тогда перекрываются и сами параллелепипеды.

Предположим, что найдутся три параллелепипеда A, B и C, нарушающие требование задачи. Тогда для каждой из трёх пар найдётся своя плоскость, проекции на которую будут перекрываться. Пусть a — расстояние между параллелепипедами B и C вдоль оси, перпендикулярной соответствующей плоскости, аналогично b — расстояние между A и C, c — расстояние между A и B. Среди всех троек, нарушающих требование задачи, возьмём одну из тех, где $a+b+c$ минимально.

Случай 1: $a+b+c=0$ (рис. 28). Тогда $a=b=c=0$ и у всех трёх параллелепипедов есть общая точка. Из этой точки выходят два противоположных октанта, не покрытых параллелепипедами A, B и C. Значит, они покрыты какими-то другими параллелепипедами D и E. Но эти параллелепипеды должны целиком лежать в своих октантах, а проекции октантов ни на одну плоскость не перекрываются. Значит, то же верно и для D и E, что противоречит условию.

Случай 2: $a+b+c>0$ (рис. 29). Предположим для определённости, что $a>0$, B находится левее C, C находится ниже A и A находится дальше B. Рассмотрим все параллелепипеды, лежащие между B и C и перекрывающиеся с ними в проекции на левую плоскость. Среди них обязательно найдётся параллелепипед F, у которого верхняя грань не ниже верхней грани C, а дальняя — не ближе дальней грани B. Если F перекрывается с A в проекции на нижнюю плоскость, то рассмотрим тройку (A, B, F), если на переднюю — тройку (A, F, C). В любом случае получим тройку, нарушающую условие задачи, с меньшей суммой $a+b+c$: по одному измерению расстояние не изменилось, по дру-

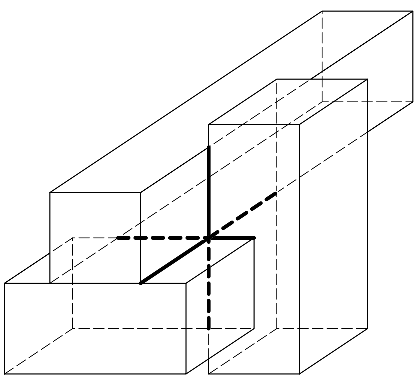


Рис. 28

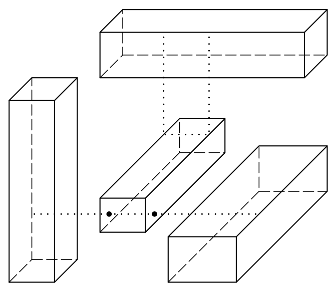


Рис. 29

гому не увеличилось, по третьему уменьшилось, — а это противоречит изначальному выбору тройки.

В обоих случаях мы приходим к противоречию, следовательно, искомой тройки параллелепипедов не существует.

6. Ответ: могут.

Решение. Обозначим гениев через G_0, G_1, G_2, G_3. Пусть имеются ещё 4 программиста F_0, F_1, F_2, F_3, которых мы будем называть «знаменитыми». Пусть каждый знаменитый программист F_i связан с каждым гением G_j цепочкой программистов

$$F_i = H_{i,j}^0 \leftrightarrow H_{i,j}^1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow H_{i,j}^{k_{i,j}} = G_j,$$

где программист $H_{i,j}^l$ знаком с программистом $H_{i,j}^{l+1}$, а число $k_{i,j}$ — длина цепочки. Пусть эти цепочки исчерпывают набор доступных программистов и существующих между ними знакомств. Мы утверждаем, что вторая фирма сможет гарантировать себе трёх гениев, если

$$\begin{array}{llll}
k_{0,0} = 13, & k_{0,1} = 12, & k_{0,2} = 11, & k_{0,3} = 10, \\
k_{1,0} = 12, & k_{1,1} = 11, & k_{1,2} = 10, & k_{1,3} = 13, \\
k_{2,0} = 11, & k_{2,1} = 10, & k_{2,2} = 13, & k_{2,3} = 12, \\
k_{3,0} = 10, & k_{3,1} = 13, & k_{3,2} = 12, & k_{3,3} = 11.
\end{array}$$

Назовём расстоянием от фирмы до программиста минимальное количество ходов, которое требуется фирме на данном этапе, чтобы взять к себе на работу данного программиста. Опишем стратегию второй фирмы в трёх возможных случаях.

1. Первая фирма выбирает сначала одного из знаменитых программистов. Тогда вторая фирма должна выбрать такого знаменитого программиста, чтобы 3 гения из четырёх были ближе ко второй фирме, чем к первой. Например, если первая берёт F_0, то вторая берёт F_1 и становится ближе к G_0, G_1 и G_2, чем первая.

2. Первая фирма вначале берёт гения (скажем, G_3). Тогда вторая фирма берёт произвольного знаменитого программиста.

3. Первая фирма вначале берёт программиста из цепочки, соединяющей некоторого гения (скажем, G_3) и неко-

торого знаменитого программиста F_i. Тогда вторая фирма берёт программиста F_i.

В обозначениях всех трёх описанных случаев вторая фирма может гарантировать себе гениев G_0, G_1, G_2, придерживаясь следующей тактики. Если на очередном шаге первая фирма берёт программиста из некоторой цепочки, ведущей к гению G_j, $j \leqslant 2$, вторая фирма сокращает своё расстояние до гения G_j, выбирая очередного программиста из цепочки, ведущей к нему. В противном случае вторая фирма сокращает расстояние до того из трёх гениев, который от неё дальше (если таковых 2 или все 3, выбирает из них произвольно).

Нетрудно видеть, что после каждого хода второй фирмы гении G_0, G_1, G_2 будут ближе ко второй фирме, чем к первой, а значит, первая фирма не сможет ими завладеть.

11 класс, первый день

1. Ответ: с 74-м членом арифметической прогрессии.

Решение. Пусть a — первое из двух чисел исходной последовательности, d — разность арифметической прогрессии, а q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда по условию задачи $a+d=aq$, $a+9d=aq^2$. Следовательно, $a(q-1)=d$ и

$$a(q-1)(q+1)=a(q^2-1)=9d=9a(q-1).$$

Поскольку $q \neq 1$, отсюда получаем $q=8$ и

$$aq^3=a+a(q^3-1)=a+a(q-1)(q^2+q+1)=a+73d.$$

Таким образом, четвёртый член геометрической прогрессии совпал с 74-м членом арифметической прогрессии.

2. Ответ: наименьший положительный корень многочлена $x^{2011}+2011x-1$ меньше, чем наименьший положительный корень многочлена $x^{2011}-2011x+1$.

Первое решение. Пусть $x_1>0$ — корень уравнения $x^{2011}+2011x-1$, а $x_2>0$ — корень уравнения $x^{2011}-2011x+1$. Тогда $x_1^{2011}+2011x_1-1=0$ и $x_2^{2011}-2011x_2+1=0$. Складывая эти уравнения почленно, получаем

$$(x_1^{2011}+x_2^{2011})+2011(x_1-x_2)=0.$$

Значит,

$$x_1 - x_2 = -\frac{x_1^{2011} + x_2^{2011}}{2011} < 0.$$

Отсюда получаем $x_1 < x_2$.

Второе решение. Функция x^{2011} принимает только положительные, а функция $2011x - 1$ — только отрицательные значения на интервале $\left(0; \frac{1}{2011}\right)$. Значит, уравнение $x^{2011} = 2011x - 1$ и многочлен $x^{2011} - 2011x + 1$ не имеют корней на этом интервале. Многочлен $x^{2011} + 2011x - 1$ принимает в концах отрезка $\left[0; \frac{1}{2011}\right]$ значения разных знаков и, следовательно, имеет корень на интервале $\left(0; \frac{1}{2011}\right)$. Таким образом, наименьший положительный корень многочлена $x^{2011} + 2011x - 1$ меньше, чем наименьший положительный корень многочлена $x^{2011} - 2011x + 1$.

3. Решение. Пусть $x = AM = ME$, $y = BE$. Так как $DM \parallel AC$, то $\angle MDB = \angle ACB = \angle ABD$ и $DM = MB = x + y$. Обозначим через K середину отрезка DE (рис. 30). Тогда MK — средняя линия в треугольнике ADE и $AD = 2MK$. По неравенству треугольника отсюда получаем

$$AD + DE = 2(DK + KM) > 2MD = \\ = 2x + 2y = (2x + y) + y = AB + BE.$$

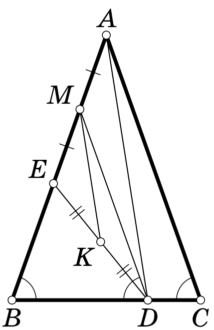


Рис. 30

4. а) См. решение задачи 6 из варианта 8 класса.

б) Ответ. Приведём пример таблицы 4×4, для которой неравенство $a \neq b$ выполняется при $k = 3$:

2	2	3	0
2	2	3	0
2	2	0	3
2	2	0	3

5. Решение. Пусть A, B, C и D — вершины этого тетраэдра, O — его центр (рис. 31). Спроецируем тетраэдр

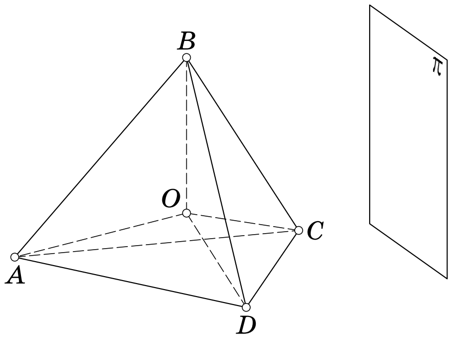


Рис. 31

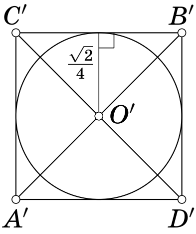


Рис. 32

ортогонально на некоторую плоскость π. Обозначим через A', B', C', D' и O' ортогональные проекции точек A, B, C, D и O на плоскость π соответственно. Если плоскость π параллельна рёбрам AB и CD, то проекция представляет собой квадрат с диагональю длины 1 (рис. 32). В этот квадрат можно вписать круг радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Приведём два способа дальнейшего решения задачи.

Первый способ. Предположим, что найдётся такая плоскость π, что ортогональная проекция правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром длины 1 на эту плоскость содержит некоторый круг с центром в точке I и радиусом $R > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Проекция тетраэдра представляет собой либо четырёхугольник

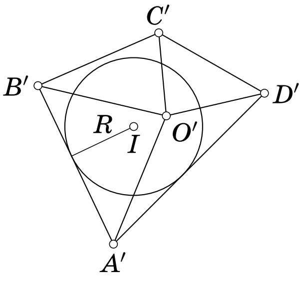


Рис. 33

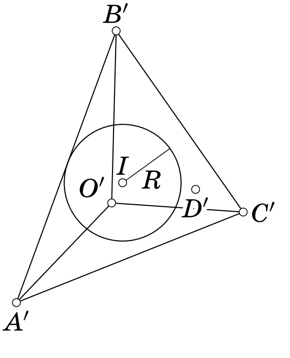


Рис. 34

с вершинами в точках A', B', C', D' (рис. 33), либо треугольник с вершинами в трёх из этих точек (рис. 34). Рассмотрим треугольники $O'A'B'$, $O'A'C'$, $O'B'C'$, $O'A'D'$, $O'B'D'$ и $O'C'D'$. По крайней мере один из этих треугольников имеет сторону, являющуюся также стороной в этой проекции, и содержит точку I. Пусть для определённости это треугольник $O'A'B'$. Тогда расстояние от ребра AB до прямой l, проходящей через точку I перпендикулярно к плоскости π, не меньше R и больше $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. С другой стороны, эта прямая пересекает треугольник OAB в некоторой точке E (рис. 35). Расстояние же от точки E до ребра AB не превосходит расстояния от точки O до этого ребра, то есть не больше $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Полученное противоречие показывает, что такой плоскости π и такой ортогональной проекции не существует.

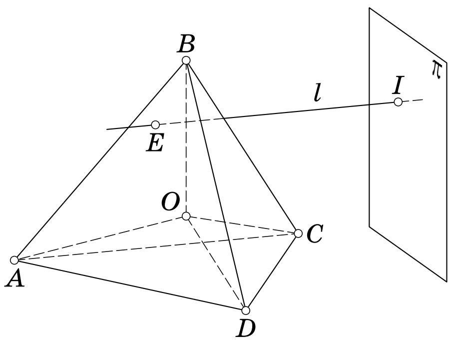


Рис. 35

Второй способ. Покажем, что ни в какой ортогональной проекции тетраэдра нельзя расположить круг, радиус которого больше, чем $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Проекция тетраэдра — это или треугольник, или четырёхугольник. Если проекция — треугольник, то это проекция грани тетраэдра. Пусть, для определённости, это грань ABC (рис. 36). В эту грань тетраэдра впишем окружность с центром в точке Q и радиусом $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} < \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Пусть Q' — проекция Q, тогда круг с центром в точке Q' и радиусом

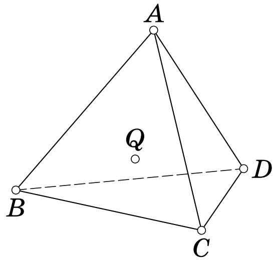


Рис. 36

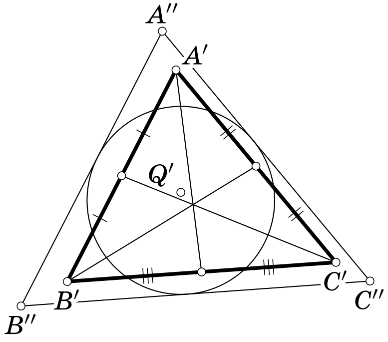


Рис. 37

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ содержит середины сторон проекции $A'B'C'$ и либо вписан в треугольник-проекцию, либо выходит за его пределы. В последнем случае проведём касательные к этому кругу, параллельные сторонам треугольника-проекции (рис. 37). Получим описанный около этого круга треугольник $A''B''C''$, который содержит треугольник $A'B'C'$ внутри себя. Значит, если в проекции можно расположить круг радиуса большего, чем $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, то этот круг расположится и в треугольнике $A''B''C''$, что невозможно.

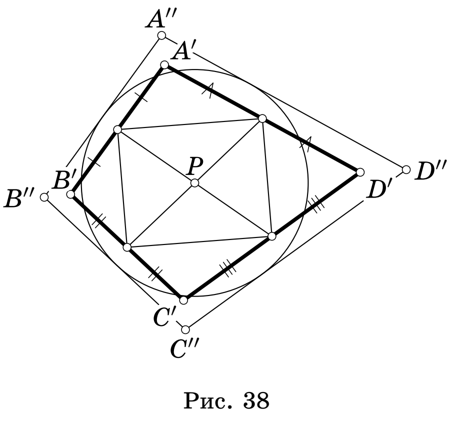


Рис. 38

Если проекция — четырёхугольник (рис. 38), пусть для определённости это $A'B'C'D'$, то середины его сторон являются вершинами параллелограмма с центром в точке P

и диагоналями, не превосходящими $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Рассмотрим круг с центром в точке P и радиусом $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Этот круг содержит указанный параллелограмм и либо вписан в четырёхугольник-проекцию, либо выходит за его пределы. В последнем случае проведём касательные к этому кругу, параллельные сторонам четырёхугольника-проекции. Получим описанный около этого круга четырёхугольник $A''B''C''D''$, который содержит четырёхугольник $A'B'C'D'$ внутри себя. Значит, если в $A'B'C'D'$ можно расположить круг радиуса большего, чем $\frac{\sqrt{2}}{4}$, то этот круг разместится и в четырёхугольнике $A''B''C''D''$, что невозможно.

6. О т в е т: да, верно.

Р е ш е н и е. Назовём число a подходящим, если $0 < a < 1$ и для этого значения a продавец сможет добиться желаемого результата. Нетрудно видеть, что если число a подходящее, то число $1 - a$ также является подходящим. Покажем, что для такого a подходящим будет также являться и число $\sqrt{a}$.

Пусть с помощью конечного числа разрезов в отношении $a : (1 - a)$ удалось разделить весь сыр на две кучки равного веса. Покажем, как разрезать какой-либо кусок сыра веса p на части в отношении $a : (1 - a)$ по весу, используя при этом лишь разрезы в отношении $\sqrt{a} : (1 - \sqrt{a})$. После первого разреза у нас появятся два куска: весом $\sqrt{a}p$ и весом $(1 - \sqrt{a})p$. Разрезав первый из кусков в том же отношении, мы в итоге получим три куска: весом ap, весом $\sqrt{a}(1 - \sqrt{a})p$ и весом $(1 - \sqrt{a})p$. Два последних куска вместе имеют вес $(1 - a)p$. Таким образом, каждая операция по разрезанию в отношении $a : (1 - a)$ может быть заменена на две операции по разрезанию в отношении $\sqrt{a} : (1 - \sqrt{a})$. То, что часть весом $(1 - a)p$ оказалась не целой, а составленной из двух, несущественно: при необходимости дальнейшего разрезания этой составной части в отношении $a : (1 - a)$ мы сможем разрезать в нужном отношении каждую из составляющих её частей, а потом разложить образовавшиеся куски на две кучки, общие веса которых относятся как

$a:(1-a)$. Каждую из этих кучек будем в дальнейшем также рассматривать как один составной кусок. Производя такие замены операций разрезания, в итоге также получаем две кучки сыра одинакового веса.

Нетрудно видеть, что $a_0 = 1/2$ является подходящим числом. Следовательно, подходящими являются и числа $a_1 = \sqrt{1/2}$, $a_2 = \sqrt[4]{1/2}$, ..., $a_n = \sqrt[2^n]{1/2}$, ..., а также числа $b_0 = 1 - a_0$, $b_1 = 1 - a_1$, ..., $b_n = 1 - a_n$, ... Заметим, что $b_{n-1}/b_n = 1 + \sqrt[2^n]{1/2} < 2$ при всех натуральных n. Положим $b_{n,m} = \sqrt[2^m]{b_n}$ при всех натуральных m и целых $n \geqslant 0$. Такие числа также являются подходящими. Так как для любого числа $x > 0$ имеем $(1+x)^2 > 1 + 2x$, то, как нетрудно показать по индукции, для любого такого x и любого натурального числа M верно неравенство

$$(1+x)^{2^M} > 1 + 2^M x$$

(неравенство $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ верно при всех натуральных n и действительных $x \geqslant -1$, оно назвается неравенством Бернулли в честь двух известных братьев Якоба и Иоганна Бернулли, в работе 1689 года «Арифметические приложения о бесконечных рядах и их конечных суммах» первого из которых было приведено доказательство этого неравенства, полученное вторым из братьев). Значит, при $M = 10$ получаем неравенства

$$(1{,}001)^{1024} > 1 + 1024 \cdot 0{,}001 > 2.$$

Тогда для всех натуральных n имеем

$$\frac{b_{n-1,10}}{b_{n,10}} = \sqrt[1024]{\frac{b_{n-1}}{b_n}} < \sqrt[1024]{2} < 1{,}001$$

и

$$b_{0,10} = \sqrt[1024]{b_0} = \sqrt[1024]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{1{,}001} > 0{,}999.$$

Отсюда получаем, что

$$0 < b_{n-1,10} - b_{n,10} = b_{n,10}\left(\frac{b_{n-1,10}}{b_{n,10}} - 1\right) < 0{,}001$$

для всех таких n. Так как

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 + \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$$

при всех натуральных n, то найдётся такое натуральное число N, что $b_N < 0{,}001^{1024}$ и, следовательно, $b_{N,10} < 0{,}001$.

Итак, числа $b_{n,10}$ при $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$ образуют такой набор подходящих чисел, что $b_{N,10} < b_{N-1,10} < \ldots < b_{0,10}$, $b_{N,10} < 0{,}001$, $b_{0,10} > 0{,}999$ и $b_{n-1,10} - b_{n,10} < 0{,}001$ при всех $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Нетрудно видеть, что этот набор имеет непустое пересечение с каждым из промежутков длины $0{,}001$ из интервала $(0;\ 1)$.

Комментарий. Заметим, что, немного изменив предложенное решение, можно показать, что множество подходящих чисел a имеет непустое пересечение с любым промежутком ненулевой длины из интервала $(0;\ 1)$. Всякое множество, обладающее таким свойством, называется *всюду плотным* на интервале $(0;\ 1)$. Нетрудно видеть, что всюду плотным на этом интервале будет, например, и множество всех правильных числовых дробей. Попробуйте доказать, что для любого иррационального числа q множество дробных частей всех чисел nq при $n = 1,\ 2,\ \ldots$ также является всюду плотным на интервале $(0;\ 1)$. Доказательство этого утверждения было получено известным математиком Карлом Якоби в первой половине XIX века. Дальнейшее развитие понятия *множество* привело в начале XX века к созданию *дескриптивной теории множеств* — раздела математики, посвящённого изучению строения точечных множеств. Одним из создателей этого раздела математики стал профессор Московского университета академик АН СССР Николай Николаевич Лузин. Благодаря его работам и работам его учеников была установлена тесная связь дескриптивной теории множеств с задачами эффективной определимости математических объектов и разрешимости математических проблем.

11 класс, второй день

1. Ответ: да, может. Подходит, например, такая новая система координат, центр которой имеет координаты $\left(-\frac{\pi}{2},\ -1\right)$ в старой системе, а единица измерения на каждой оси новой системы в два раза больше по сравнению со старой.

Решение. Заметим, что для решения задачи нам достаточно предъявить хотя бы одну искомую систему координат. Пусть $y = \sin x$. Так как

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{1 + \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)}{2},$$

то при $x=2t-\frac{\pi}{2}$ и $z=\frac{y+1}{2}$ (или, иначе говоря, $y=2z-1$) получаем $z=\sin^2 t$. Начало координат O' новой системы координат $O'tz$ имеет относительно старой системы Oxy координаты $\left(-\frac{\pi}{2},\ -1\right)$, а единица измерения на каждой оси новой системы в два раза больше по сравнению со старой системой координат.

Отметим (докажите это самостоятельно), что в задаче возможны следующие ответы: новая система координат может иметь центр с координатами $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^{n+1}\right)$ в старой системе, где $n \in \mathbb{Z}$, а единица измерения на каждой оси новой системы в два раза больше по сравнению со старой.

2. О т в е т: верно.

Р е ш е н и е. Пусть имеется x карточек с цифрой 1, y карточек с цифрой 2 и z карточек с цифрой 3. Тогда $x+y+z=100$, и так как

$$\frac{x+y-z}{2}+\frac{z+y-x}{2}+\frac{x+z-y}{2}=\frac{x+y+z}{2}=50,$$

то искомый ряд можно сложить из $\frac{x+y-z}{2}=50-z$ фрагментов 21, затем из $\frac{z+y-x}{2}=50-x$ фрагментов 32, а затем из $\frac{x+z-y}{2}=50-y$ фрагментов 31. При этом карточка с цифрой 1 встретится ровно

$$(50-z)+(50-y)=100-z-y=x$$

раз, карточка с цифрой 2 — ровно y раз, а карточка с цифрой 3 — ровно z раз, причём запрещённые фрагменты в предложенном ряде не встретятся, даже если какое-либо из значений x, y или z равно 50.

3. О т в е т: $\sqrt{2}$

П е р в о е р е ш е н и е. Построим точку D, симметричную точке C относительно прямой BO (рис. 39). Тогда $\angle BDO=\angle BCO=\angle BAO$. Значит, точка D лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABO, и $\angle ADO=\angle ABO=\angle CAO$. Получаем, что треугольник DAC подобен

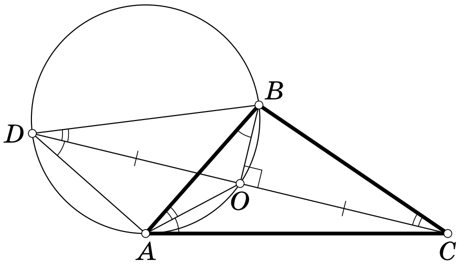


Рис. 39

треугольнику AOC. Следовательно, справедливы соотношения $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{OC}$ или $\frac{2OC}{AC} = \frac{AC}{OC}$, откуда получаем $\frac{AC}{OC} = \sqrt{2}$.

Второе решение. Так как $\angle BAO = \angle BCO$, то точки A и C принадлежат ГМТ, из которых отрезок BO виден под одним углом. Это ГМТ состоит их двух дуг окружностей (без точек B и O), расположенных по разные стороны от прямой BO. Пусть прямая CO пересекает содержащую точку A дугу ГМТ в точке D (точка O лежит между точками D и C). Так как $\angle BOC$ прямой, то $\triangle DOB = \triangle COB$ и $DO = OC$. При этом $\angle ODA = \angle OBA$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, и $\angle OBA = \angle OAC$ по условию. Поэтому треугольник AOC подобен треугольнику DAC по двум углам. Значит, $\frac{OC}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{2OC}$ и $\frac{AC}{OC} = \sqrt{2}$.

Комментарий. Отметим, что у этой задачи есть и другие решения, в которых используются теорема Чевы для треугольника ABC и теорема синусов для треугольников AOB, AOC и BOC.

4. Ответ: $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, \ldots, a_{2010} = 2011, a_{2011} = 1$.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ — искомая расстановка чисел. Нетрудно видеть, что тогда должно быть выполнено равенство $a_{2011} = 1$, так как иначе выражение из условия задачи можно было бы увеличить, поменяв между собой местами числа $a_k = 1$ $(k \neq 2011)$ и a_{2011}.

Сравним два числа a^{b^c} и b^{a^c}, где a, b и c — некоторые натуральные числа, причём $a \neq b$, $a \geqslant 2$ и $b \geqslant 2$. Так как функция $y = \ln x$ монотонно возрастает при всех $x > 0$, то разность $a^{b^c} - b^{a^c}$ имеет тот же знак, что и разность

$$b^c \ln a - a^c \ln b = a^c b^c (a^{-c} \ln a - b^{-c} \ln b).$$

Найдём промежутки монотонности функции $y = x^{-c} \ln x$. Имеем

$$y' = -cx^{-c-1} \ln x + x^{-c-1} = x^{-c-1}(1 - c \ln x).$$

Так как $y' > 0$ при $0 < x < e^{1/c}$ и $y' < 0$ при $x > e^{1/c}$, то функция $y = x^{-c} \ln x$ возрастает на промежутке $0 < x < e^{1/c}$ и убывает на промежутке $x > e^{1/c}$.

При $c = 1$, учитывая неравенство $3 > e$, отсюда получаем

$$3^{-1} \ln 3 > 4^{-1} \ln 4 = 2^{-1} \ln 2 > 5^{-1} \ln 5 > \ldots > 2011^{-1} \ln 2011.$$

Значит, $a^{-1} \ln a > b^{-1} \ln b$, если $3 \leqslant a < b$. Следовательно, $a^{b^1} > b^{a^1}$ при $3 \leqslant a < b$. При $c \geqslant 2$ имеем $1 < e^{1/c} < 2$. Поэтому при таких значениях c получаем, что

$$2^{-c} \ln 2 > 3^{-c} \ln c > 4^{-c} \ln 4 > \ldots > 2011^{-c} \ln 2011.$$

Тогда $a^{-c} \ln a > b^{-c} \ln b$ и $a^{b^c} > b^{a^c}$ при $2 \leqslant a < b$.

Докажем по индукции, что для искомой расстановки чисел и всех $n = 1, 2, \ldots, 2010$ имеет место равенство $a_{2011-n} = 2012 - n$. Пусть сначала $n = 1$. Если $2011 = a_k$, где $k \leqslant 2009$, то $2 \leqslant a_{k+1} < a_k$ и, по доказанному выше, $a_k^{a_{k+1}^c} < a_{k+1}^{a_k^c}$ при всех натуральных c. Поэтому выражение из условия задачи можно увеличить, поменяв между собой местами числа $a_k = 2011$ и a_{k+1}. Полученное противоречие означает, что $a_{2010} = 2011$. Аналогичными рассуждениями доказываются и следующие шаги индукции: считая уже доказанным равенство $a_{2011-n} = 2012 - n$ при некотором натуральном $n \leqslant 2007$ и предполагая, что $a_{2011-(n+1)} \neq 2012 - (n + 1)$, приходим к противоречию, так как по доказанному выше $a_k^{a_{k+1}^c} < a_{k+1}^{a_k^c}$ при $2012 - (n + 1) = a_k$, где $k \leqslant 2011 - (n + 2)$. Значит, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $\ldots$, $a_{2010} = 2011$ и $a_{2011} = 1$. Для доказательства того, что $a_1 = 2$ и $a_2 = 3$, заметим, что при $c = 4^{5^{\cdots^{2011}}} > 2$ имеет место неравенство $2^{3^c} > 3^{2^c}$. Следовательно, выражение из условия задачи будет наибольшим при $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $\ldots$, $a_{2010} = 2011$ и $a_{2011} = 1$.

5. Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что по каждому ребру могут двигаться только два жука, причём в противоположных направлениях. Так как при этом из-за ограничения на скорость ни один из жуков не может бесконечно долго находиться на одном ребре, то настанет такой момент, когда каждый из них хотя бы раз пройдёт через некоторую вершину тетраэдра. Рассмотрим возможные варианты расположения жуков в некоторый следующий момент после этого. Если при этом какой-либо жук находится в вершине, то считаем, что он находится на двух рёбрах: с которого он пришёл и на которое пойдёт. Вот все возможные случаи.

а) Какие-либо два жука оказались на одном ребре. Тогда если они движутся навстречу друг другу, то они обязательно встретятся. Если же они расходятся в разные стороны, то они уже встретились на этом ребре, так как каждый из них уже проходил через одну из вершин этого ребра.

б) Какие-либо три жука находятся на рёбрах с общей вершиной, и все они движутся в её сторону. Рассмотрим первый из следующих за этим моментов времени, при котором один (или несколько) из этих жуков попадёт (попадут) в вершину. Тогда какие-то два жука окажутся на одном ребре, и мы приходим к случаю а).

в) Все четыре жука находятся на четырёх рёбрах, из которых никакие три не имеют общей вершины. Тогда оставшиеся два ребра не имеют общих вершин. С точностью до переименования вершин тетраэдра получаем только один вариант такого расположения: жуки находятся на рёбрах AB, AC, BD, CD, причём жук на AB движется от A к B и всё время находится на грани ABC. Тогда по AC он пойдёт от C к A. Значит, в данный момент жук на AC движется в направлении от A к C. Рассматривая этого жука и его грань ACD, получим, что в данный момент жук на CD идёт от D к C. Аналогично получаем, что жук на BD идёт от D к B. Если первым в вершину попадёт жук с ребра AC или DB, то приходим к случаю а). Если первым вершины B достигнет жук на ребре AB, то он окажется на BC и три жука будут двигаться к вершине C. Если первым в вершину C попадёт жук с DC, то он окажется на CB и вновь три жука будут двигаться к B. В обоих случаях приходим к пункту б).

г) Какие-либо три жука находятся на рёбрах при одной вершине, но не все из них ползут в её сторону. Тогда с точностью до переименования вершин это рёбра AB, AC и AD, причём жук на AB движется от A к B и всё время находится на грани ABC. Рассуждая аналогично пункту в), получаем, что все эти три жука движутся от вершины A. Не ограничивая общности, можем считать, что первым из этих жуков достигнет вершины тетраэдра жук на AB. При этом он переползёт на ребро BC. Если жук, всё время ползущий по грани BCD, находится в этот момент на ребре BC, то приходим к случаю а). Если же он находится на CD, то три жука движутся в направлении C по трём смежным к этой вершине рёбрам, и тогда приходим к случаю б). Наконец, если он находится на BD, то жуки находятся на рёбрах AC, AD, BC и BD. Приходим к случаю в).

Таким образом, в каждом из возможных случаев какие-либо два жука обязательно встретятся.

К о м м е н т а р и й. Утверждение о том, что два жука обязательно встретятся, останется верным и в том случае, если они будут ползать по рёбрам произвольного выпуклого многогранника. При этом естественно предполагается выполнение остальных условий задачи: в каждой грани ползает свой жук, по каждому из рёбер два проползающих по ним жука двигаются в разных направлениях и скорость жуков всегда не меньше чем 1 см/с. Отметим, что это утверждение было не только доказано, но и применено для доказательства новых теорем из высшей алгебры в статье доцента Механико-математического факультета МГУ Антона Александровича Клячко (см. *A. Klyachko*. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra.— 1993.— V. 21.— P. 2555—2575.).

6 класс (*1321 работа*)

	1	2	3	4	5	6
0	429	146	477	418	1303	1284
1	415	2	89	228	6	2
2	139	4	395	366	3	17
3	338	1169	166	102	0	4
4			42	95	0	6
5			152	112	3	2
6					0	0
7					1	4
8					5	2

7 класс (*874 работы*)

	1	2	3	4	5	6
0	113	258	244	437	522	500
1	21	86	253	100	20	93
2	3	47	109	59	60	26
3	737	17	35	24	11	124
4		466	233	22	27	32
5				41	22	31
6				191	212	68

8 класс (*592 работы*)

	1	2	3	4	5	6
+	364	105	101	7	4	7
+.	10	3	1	0	0	0
±	26	27	0	7	4	0
+/2	0	21	0	0	0	0
∓	3	188	3	11	4	3
−.	0	3	3	3	2	2
−	142	141	387	324	197	255
0	47	104	97	240	381	325

9 класс (*577 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	370	76	114	75	12	4
+.	0	2	0	3	1	0
±	28	60	5	4	2	3
∓	40	29	6	3	3	38
−	133	311	297	264	116	160
0	6	99	155	228	443	372

10 класс (*580 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	136	39	17	166	0	0
$+.$	146	14	52	12	0	1
$\pm$	37	15	8	12	2	2
$+/2$	0	0	0	0	1	0
$\mp$	33	36	6	82	10	4
$-.$	4	41	20	53	7	8
$-$	133	268	198	188	203	254
0	91	167	279	67	357	311

11 класс, первый день (*696 работ*)

	1	2	3	4а	4б	5	6
$+$	425	351	269	34	121	2	2
$\pm$	105	17	22	2	0	2	0
$\mp$	48	75	63	20	2	185	10
$-$	118	253	342	640	573	507	684

11 класс, второй день (*219 работ*)

	1	2	3	4	5
$+$	77	50	50	13	9
$\pm$	36	12	3	1	8
$\mp$	41	26	6	24	12
$-$	65	131	160	181	190

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учёными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всём мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

Ежегодно в апреле механико-математический факультет проводит олимпиады для учащихся 7—10 классов, результаты которых учитываются при наборе в математические классы при факультете и в школу-интернат имени А. Н. Колмогорова.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
http://www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ВШЭ

Факультет математики — небольшой молодой математический факультет, ориентированный на исследования. Преподают на факультете ведущие математики Москвы, активно разрабатывающие собственные направления. Особенное внимание уделяется современным направлениям в алгебре, топологии, алгебраической геометрии. Студенты факультета получают широкую базовую математическую подготовку. Это даст выпускникам свободу выбора последующей специализации, а приобрётенные исследовательские навыки пригодятся вне зависимости от специальности.

По окончании программы бакалавриата выпускники смогут совершенствоваться в магистратуре и аспирантуре факультета математики, а также других факультетов ВШЭ и других ведущих вузов России и мира.

Высшая школа экономики — государственный университет. Студенты получают отсрочку от призыва в вооружённые силы. В университете имеется военная кафедра. Иногородние студенты обеспечиваются общежитием.

Подробную информацию о факультете и преподавателях см. на сайте http://math.hse.ru.

Информацию об учебных курсах и учебные материалы можно найти на сайте http://vyshka.math.ru.

Вопросы задавайте по электронной почте math@hse.ru.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
http://www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ЖУРНАЛ «КВАНТ» В ИНТЕРНЕТЕ
http://kvant.mccme.ru/

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

Сейчас старые номера журнала «Квант» практически недоступны читателям. Имеется ничтожное число библиотек, в которых есть полное собрание вышедших журналов. Этот сайт призван открыть путь к богатому архиву журнала.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ
http://vofem.ru/

Электронная версия научно-популярного журнала, заложившего традиции жанра в литературе на русском языке.

С 1886 по 1917 год вышло 674 выпуска В. О. Ф. Э. М. Журнал в разные годы возглавляли: Эразм Корнелиевич Шпачинский (1886—1898), Владимир Акимович Циммерман (1898—1904), Вениамин Фёдорович Каган (1902—1917).

Периодичность — 24 раза в год отдельными выпусками в 24 или 32 страницы каждый.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы, отчёты о заседаниях московского математического кружка и многое другое.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте http://www.problems.ru

ДЕВЯТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 10 апреля 2011 года

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступивших в городской математической олимпиаде, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Седьмой Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится летом 2011 года.

Олимпиада будет проходить в помещении школы № 192 по адресу Ленинский проспект, д. 34-А (м. «Ленинский проспект»). Начало олимпиады в 11^{00}. Справки по телефону: (495) 137-33-55 с 10^{00} до 18^{00}.

Так как ожидается большое количество участников, то желающих принять участие в олимпиаде просим до 5 апреля зарегистрироваться на сайте школы

http://olymp.sch192.ru

При регистрации необходимо указать свою фамилию, имя, класс, школу и округ (город).

Участников просят иметь при себе: сменную обувь, письменные принадлежности, бумагу для записей.

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице http://www.mccme.ru/leto

Одиннадцатая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

пройдёт с 18 по 29 июля 2011 года в Дубне (на базе санатория-профилактория «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, присылайте в Оргкомитет до 10 мая заполненную анкету участника. (Персонально приглашаются на школу обладатели дипломов I—II степени в параллели 10 и 11 классов на этой или предыдущей ММО.)

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академики РАН Ю. В. Матиясевич и С. П. Новиков, члены-корреспонденты РАН И. А. Панин и А. А. Разборов, профессора И. М. Кричевер, А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, В. А. Успенский, С. К. Ландо, а также Ю. М. Бурман, А. И. Буфетов, М. Э. Казарян, В. А. Клепцын, А. Г. Кузнецов, Д. О. Орлов, Г. Ю. Панина, И. В. Ященко и другие.

Материалы прошедших школ и информационное сообщение о школе—2011 смотрите на сайте

http://www.mccme.ru/dubna/

Контактный e-mail оргкомитета: dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXIV Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Корректоры *М. Г. Быкова*, *О. А. Васильева*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 28/III 2011 г.
Формат бумаги $60 \times 90/16$. Объём 3,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
Москва, 2-й Лихачёвский пер., д. 7.

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ

в московские специализированные школы и классы на 2011/2012 учебный год

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 (499) 137-17-69 ул. Фотиевой, 18 (499) 137-69-31 http://www.sch2.ru/	7 и 8 физ.-матем.	Вступительные испытания с 18 марта по 20 мая
№ 25 (495) 939-39-35 Университетский пр., 7 http://sch25.ru/	7 физ.-матем., (*добор* в 8 и 9 физ.-матем.)	7 кл. по понед. с 16^{00}, 8 и 9 кл. по средам с 16^{00}
№ 54 (499) 245-54-25 ул. Доватора, 5/9 (499) 245-99-72 http://moscowschool54.narod.ru	8 матем.	С февраля по май по раб. четвергам с 9^{20} до 11^{00}
№ 57 (495) 691-85-72 М. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (495) 691-54-58 http://www.sch57.msk.ru/	8 матем.	По средам в 16^{00} с 16 марта,
№ 179 (495) 692-48-51 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 http://www.179.ru/	8, 9 матем.	Март—апрель
№ 192 (499) 137-33-55 Ленинский просп., 34-А (499) 137-72-85 http://www.sch192.ru/ mail@sch192.ru	5 ест.-научный, 7 био.-хим., физ.-матем., 9 физ.-хим., 10 физ.-хим.; *добор* в 8, 9, 10 био.-хим., 8, 9, 10 физ.-матем.	Март—май по пятницам в 16^{00}
№ 218 (495) 976-63-45 Дмитровское ш., 5а (495) 976-19-85 sch218.edu@mtu-net.ru http://www.mccme.ru/schools/218/	6, 7, 8 *добор* в 9 и 10 широкий выбор спецкурсов	Запись на собеседование с 1 марта по телефону (понед., среда, пятница 16^{00}—18^{00}) Экзамены с 4 апреля
№ 315 (499) 264-64-45 Русаковская ул., 10 http://school315.ru/	10 физ.-матем. при МГТУ им. Баумана 10 мед.-биол. при Академии им. Сеченова	Физ.-матем.: март—май Мед.-биол.: апрель
№ 463 (499) 612-34-19 Судостроительная ул., 10 http://sch463.edite.ru	8, 10 при МФТИ, *добор* в 8 гум.	Февраль—май по пятницам

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 1303 (495) 362-34-40 Таможенный пр., д. 4 http://www.1303.ru	9 хим, 9 физ.-матем., *добор* в 10 хим, 10 физ.-матем.	Запись по тел. с 9 марта
№ 1329 (495) 651-35-98 ул. Никулинская, 10 http://sch1329.ru	7 физ.-матем.	По субботам в 16^{00} с 14 марта
№ 1332 (495) 714-97-72 б-р Дмитрия Донского, 6, корп. 1 http://1332.ru	8, 9, 10 физ.-матем. при МФТИ	Март—июнь по четвергам в 15^{30}
№ 1543 (495) 433-16-44 ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (495) 434-26-44 http://www.1543.ru	8 матем., физ.-хим., био., гум.	Апрель
№ 1568 (495) 656-88-13 проезд Шокальского, 7, корп. 2 (495) 656-83-04 http://www.fml1568.ru	7—8 физ.-матем., *добор* в 9—10 физ.-матем., хим.	21 марта—20 мая
№ 2007 (495) 716-29-35 ул. Горчакова, 9, корп. 1. http://www.fmsh2007.ru	5, 7 физ.-матем., *добор* в 6, 8, 9 физ.-матем.	По четвергам с 7 апреля
СУНЦ МГУ (495) 445-11-08 Кременчугская ул., 11 priem@pms.ru http://www.pms.ru	10 физ.-матем., комп.-инф., хим., био. 11 физ.-матем.	Март—май
«Интеллектуал» (495) 445-52-10 Кременчугская ул., 13 http://sch-int.ru	5 разноур. обуч.: матем., русск. яз., англ. яз, история; *добор* в 7; широкий выбор кружков	Запись на экзамены с февраля на сайте

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Обучение в школах (классах) бесплатное.
Более подробная информация о наборе в эти и другие школы — на сайте http://www.mccme.ru/schools/

Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXIV
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Яndex

ONIX

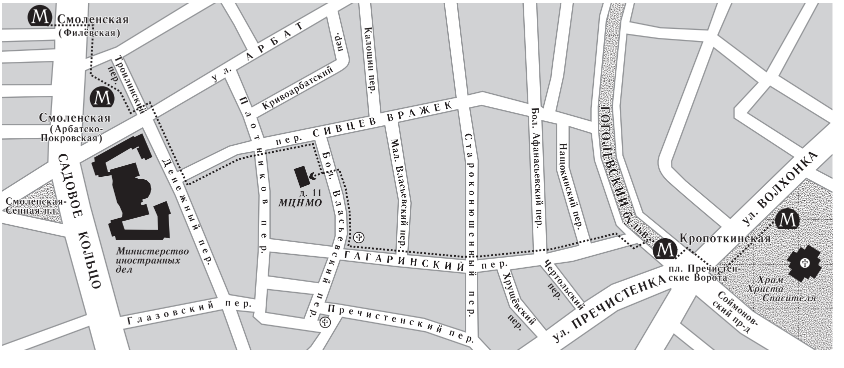
Москва
Издательство МЦНМО
2011

РАСПИСАНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ
3 апреля 2011 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
11^{30}	Разбор задач	14–08	16–10	02	01
12^{30}	Показ работ	14 этаж	13 этаж	02	12 этаж
14^{00}	Лекция проф. Д. В. Трещёва в ауд. 16–10				
15^{30}	Торжественное закрытие, награждение победителей	02			

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении, будет происходить по средам с 16^{00} до 18^{00} в МЦНМО (Бол. Власьевский пер., 11, телефон (499) 241-12-37, http://www.mccme.ru, mmo@mccme.ru).

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО



ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице http://www.mccme.ru/leto