Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2010
5 класс

1. Сколько всего трехзначных чисел?

<u>Ответ.</u> 900

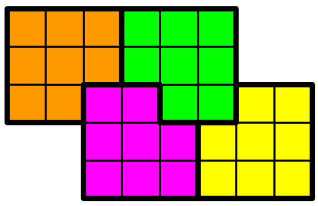
<u>Решение</u>. Первое трехзначное число 100, последнее – 999. Всего 999 чисел от 1 до 999, из них нам не нужны 99 чисел – от 1 до 99. Поэтому нужных 999-99=900.
*<u>Комментарий</u>. Можно было посчитать, использую комбинаторику: для первой цифры 9 вариантов, для второй 10, для третьей 10, итого 9*10*10=900 комбинаций.*

2. Календарь представляет собой два кубика, у каждого кубика на всех гранях написано по цифре. Дату (день месяца) составляют, используя один или два кубика. Придумайте, как написать цифры на кубиках, чтобы можно было получить любую дату от 1 до 31. *(В ответе напишите, какие цифры должны быть на одном кубике, а какие – на другом.)*

<u>Решение</u>. Например, на одном кубике написаны цифры 0, 1, 2, 4, 5, 6 а на другом 1, 2, 3, 7, 8, 9.

<u>Замечание</u>. Существуют и другие примеры. Для проверки правильности примера, достаточно проверить, что 1) в каждой группе по 6 цифр, 2) все цифры встречаются, 3) можно составить числа 11, 22 и 30 (т.е. в каждой группе есть цифры 1 и 2, а цифры 0 и 3 находятся в разных группах).

3. Разрежьте фигуру на рисунке справа на 4 равные части.



4. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. А когда поезд отъезжал, один из них насчитал еще 2 скамейки. Сколько насчитали остальные?

<u>Ответ.</u> 5 и 10 скамеек.

<u>Решение</u>. Очевидно, что тот, кто до остановки проехал большую часть перрона, насчитал большее число скамеек. Пусть первый насчитал 15 скамеек, второй 12, третий 7. Так как первый насчитал на 3 скамейки больше, чем второй, то, когда поезд будет отъезжать, второй увидит эти 3 скамейки, т.е. насчитает на 3 скамейки больше, чем первый. Аналогично третий

насчитает на 8 скамеек больше, чем первый. Раз кто-то насчитал 2 скамейки, то это мог быть только первый. Значит, остальные насчитали 2+3=5 и 2+8=10 скамеек.

5. Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Без Мышки все остальные не могут вытащить репку, а вместе с Мышкой – могут. Сколько мышек надо собрать вместе, чтобы эти мышки смогли вытащить репку сами?

Ответ. *1237 мышек.*
Решение.
Кошка = 6 мышек;
жучка = 5 кошек = 30 мышек;
внучка = 4 жучки = 120 мышек;
бабка = 3 внучки = 360 мышек;
дедка = 2 бабки = 720 мышек.
Все вместе дедка+бабка+внучка+жучка+кошка+мышка =
720+360+120+30+6+1=1237 мышек.

6. Мальчик Сережа увидел двоих двухголовых дракончиков, головы которых спутались. Драконы бывают либо правдивые, т.е. обе головы говорят только правду, либо лживые, т.е. обе головы всегда лгут. Сережа решил помочь дракончикам распутать головы. Но для этого ему надо знать, где чья голова. Он спросил это у дракончиков, на что головы ответили:

первая: «я – правдивая голова»;
вторая: «третья голова – моя родная голова»;
третья: «вторая голова – не родная мне голова»;
четвертая: «третья голова – лживая».

Какие головы принадлежат каким дракончикам?

Ответ. *Третья и первая головы от одного (правдивого) дракона, а вторая и четвертая – от другого (лживого).*

Решение. Вторая и третья головы противоречат друг другу, значит, они не родные (родные головы либо обе скажут, что они родные, либо обе скажут, что они не родные). А значит, третья голова сказала правду (т.е. она правдивая), а вторая солгала (т.е. она лживая). Значит, четвертая голова солгала, сказав, что третья лживая, т.е. родная второй голове. А тогда третья родная первой.

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Правильный ответ без обоснования – *3 балла*. Выражение 999-99=900 или 999-100+1=900 является достаточным обоснованием. Выражение 1000-100=900 без дополнительных пояснений обоснованием не считается.

Задача 2. Правильное распределение – *7 баллов*. Голый неправильный пример – *0 баллов*. Сказано, что 1 и 2 должны быть на обоих кубиках, т.к. есть числа 11 и 22, а дальше пример неправильный из-за того, что 0 и 3 поместили на один кубик – *2 балла*.

Задача 3. Правильное разрезание – *7 баллов*. Разрезание на равные по площади, но не равные части – *0 баллов*.

Задача 4. Ответ без обоснования – *2 балла*.

Задача 5. Есть идея все выражать в мышках, но не доведено до конца или неправильно доведено (например, посчитано, что дедка - это 720 мышек и в ответ записано 720) – *2 балла*. Вычислительная ошибка – минус *1 балл* (если вычислительных ошибок несколько, соответственно вычитается больше).

Задача 6. Правильный ответ *1 балл*. Правильный ответ и проверка – все равно *1 балл*. Неполный перебор, какие головы кому принадлежат, добавляет не больше *2 баллов*.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2010
6 класс

1. Календарь представляет собой два кубика, у каждого кубика на всех гранях написано по цифре. Дату (день месяца) составляют, используя один или два кубика. Придумайте, как написать цифры на кубиках, чтобы можно было получить любую дату от 1 до 31. *(В ответе напишите, какие цифры должны быть на одном кубике, а какие – на другом)*

Решение. Например, на одном кубике написаны цифры 0, 1, 2, 4, 5, 6 а на другом 1, 2, 3, 7, 8, 9.

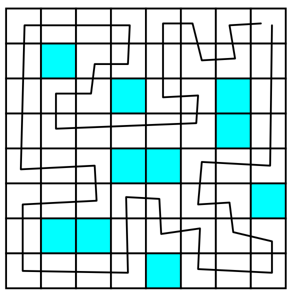
Замечание. Существуют и другие примеры. Для проверки правильности примера, достаточно проверить, что 1) в каждой группе по 6 цифр, 2) все цифры встречаются, 3) можно составить числа 11, 22 и 30 (т.е. в каждой группе есть цифры 1 и 2, а цифры 0 и 3 находятся в разных группах).

2. Одной черепахе 300 лет, а другой 15 лет. Через сколько лет первая черепаха будет вдвое старше второй?

Ответ. Через 270 лет.

Решение. Разница между черепахами всегда 300-15=285 лет. Одна будет вдвое старше другой, когда второй будет столько лет, какова разница, т.е. 285. А 285 лет второй черепахе исполнится через 285-15=270 лет.

3. Сад разбит на квадраты. Садовник начал обход с верхнего правого квадрата, обошел весь сад и вернулся в тот же угловой квадрат. В закрашенных квадратиках он не был (там располагаются пруды). Во всех остальных квадратиках он побывал по одному разу, причем через вершины квадратов он не проходил. Начертите возможный путь садовника.



Ответ. Один из возможных примеров обхода приведен на рисунке (возможны и другие пути).

4. На некотором острове каждый житель либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Трое островитян А, Б, В сказали следующее:

А: «Б – лжец»;
Б: «ровно один из А и В лжец»;
В: «у меня есть крокодил».

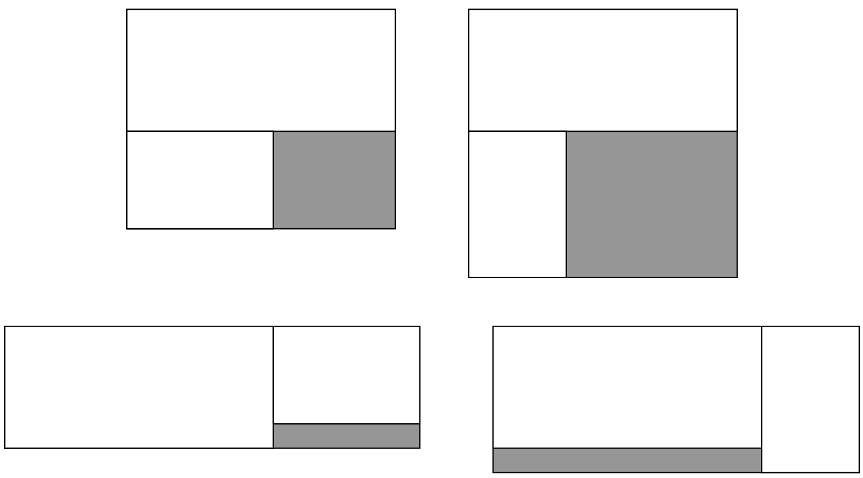
Есть ли у В крокодил?

Ответ. Да, есть.
Решение.
Первый способ. 1) Пусть А говорит правду. Тогда Б – лжец. Тогда А и В оба лжецы или оба «правдивцы», но т.к. А – «правдивец», то и В «правдивец», т.е. крокодил у него есть.
2) Пусть А – лжец. Тогда Б – «правдивец». Тогда ровно один из А и В лжец, но т.к. А лжец, то В – «правдивец». Т.е. крокодил у него есть.
Таким образом, в обоих случаях получаем, что у В есть крокодил.
Второй способ. 1) Пусть Б «правдивец». Тогда ровно один из А и В лжец, но т.к. А говорит, что Б лжец, то А – лжец => В «правдивец» => крокодил у него есть.
2) Пусть Б лжец. Тогда оба А и В «правдивцы», или оба лжецы. Но А говорит, что Б лжец, т.е. говорят правду = > они оба (А и В) «правдивцы», т.е. у В есть крокодил.

5. Прямоугольник разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 5х11 и 4х6. Какие размеры мог иметь третий прямоугольник? (Найдите все возможности.)

Ответ. 5х4, 7х6, 1х6, 1х11.

Решение. Посмотрим, как могут прилегать прямоугольники друг к другу.
Прямоугольник 4х6 может примыкать к стороне 5 или к стороне 11, при этом прилегать он может стороной 4 или стороной 6, т.е. всего 4 варианта:



Из них получаем размеры третьего прямоугольника: 5х4, 7х6, 1х6, 1х11.

6. Винни-Пуху дали полную тарелку манной каши. Он съел половину и положил в тарелку еще столько же меда. Затем он съел треть содержимого тарелки (каши с медом) и снова доложил мед. Потом съел четверть содержимого и опять доложил медом, после чего с аппетитом все съел. Чего в итоге Винни-Пух съел больше: каши или меда?

Ответ. Меда он съел больше.
Решение. Видно, что Пух в итоге съел тарелку каши. Посчитаем, сколько он съел меда: $1/2+1/3+1/4 = 13/12>1$.

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Правильное распределение – *7 баллов*. Только неправильный пример – *0 баллов*. Сказано, что 1 и 2 должны быть на обоих кубиках т.к. есть числа 11 и 22, а дальше пример неправильный из-за того, что 0 и 3 поместили на один кубик – *2 балла*.

Задача 2. Только ответ без всяких пояснений – *2 балла*.

Задача 3. Правильный пример – *7 баллов*. Пример незамкнутого пути или пути не по всем клеткам – *0 баллов*.

Задача 4. Голый ответ «Да, есть» – *0 баллов*. Разобран только один случай, например, что А – «правдивец» – *1 балл*.

Задача 5. Найдены все варианты (подтверждены картинками), но нет никаких объяснений, почему это именно ВСЕ варианты – *5 баллов*. Найдены только три из четырех вариантов – *2 балла*. Найдено два варианта – *1 балл*. Найден только один вариант – *0 баллов.*

Задача 6. Голый ответ *0 баллов*.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады,
октябрь 2010
7 класс

1. Замените буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство:

   $$О + Л + И + М + П + И + А = ДА$$

   (Одинаковые буквы надо заменять одинаковыми цифрами, разные – разными, ДА – двузначное число)

<u>Ответ.</u> Например, О=3, Л=4, И=0, М=5, П=8, Д=2, А=9.

<u>Решение</u>. Вычтем из обоих частей уравнения А, получим, что сумма цифр О+Л+И+М+П+И должна заканчиваться на ноль. Попробуем подобрать цифры так, чтобы например она была равна 20 (т.е. Д=2). Это легко сделать, например 3+4+0+5+8+0 =20. т.е. О=3, Л=4, И=0, М=5, П=8, Д=2, А=9

<u>Комментарий</u>. Возможно много других решений. При этом Д может равняться 2, 3, 4.

2. На каждой перемене Робин-Бобин-Барабек съедает по конфете. За неделю (с понедельника по субботу) было 30 уроков. Сколько всего конфет съел Робин на переменах?

<u>Ответ.</u> 24 конфеты.

<u>Решение</u>. Если бы все эти уроки произошли в один день, то Робин съел бы 29 конфет (количество промежутков между 30 уроками). Но так как между последним уроком какого-то дня и первым уроком следующего дня конфета не съедается, то нужно еще вычесть 5 конфет (по количеству промежутков между шестью днями), т.е. итого получается, что Робин съел 30 – 5=24 конфеты.

3. Из двух одинаковых железных проволок кузнец сковал по железной цепи. Первая содержит 80 звеньев, а вторая – 100. Каждое звено первой цепи на 5 граммов тяжелее каждого звена второй цепи. Какова масса цепей?

<u>Ответ</u>. 2 кг.

*<u>Первое решение</u>. Пусть x г – масса каждого звена второй цепи, тогда (x+5) г – масса каждого звена первой цепи. Тогда масса проволоки, с одной стороны, равна 100x, а с другой 80(x+5) г. Из равенства 100x=80(x+5) следует, что x=20, а масса одной проволоки 100*20 г = 2 кг.*

*<u>Второе решение</u>. Т.к. массы цепей одинаковы, то, «забрав» у каждого звена первой цепи по 5 г, мы получим 80 кусочков по массе таких же, как звенья второй цепи, а из излишков должны получиться оставшиеся 20 звеньев. Т.е. 20 звеньев весят 5*80=400 г, а одно звено второй цепи весит 400:20=20 г. Поэтому все 100 звеньев весят 100*20=2000 г, т.е. 2 кг.*

4. Углы *AOB*, *BOC* и *COD* равны между собой, а угол *AOD* втрое меньше каждого из них. Все лучи OA, OB, OC, OD различны. Найдите величину угла *AOD* (перечислите все возможные варианты).

<u>Ответ</u>. 36^0, 45^0.

<u>Решение</u>. Углы AOB, BOC и COD следуют друг за другом в одном направлении (т.к. никакие лучи не совпадают). При этом их сумма может быть меньше 360^0 (см. рис 1) и больше 360^0 (см. рис. 2). Обозначим величину угла AOD через x. Тогда каждый из углов AOB, BOC и COD равен 3x. В первом случае получается, что $3x+3x+3x+x=360^0$, откуда $x=36^0$. Во втором $3x+3x+3x-x=360^0$, откуда $x=45^0$.

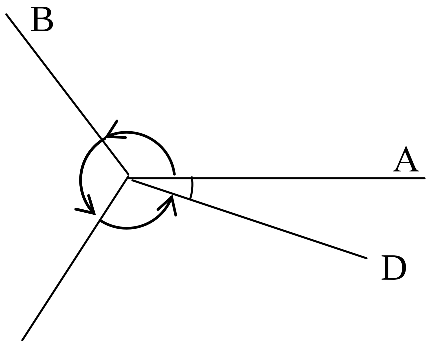


Рис. 1

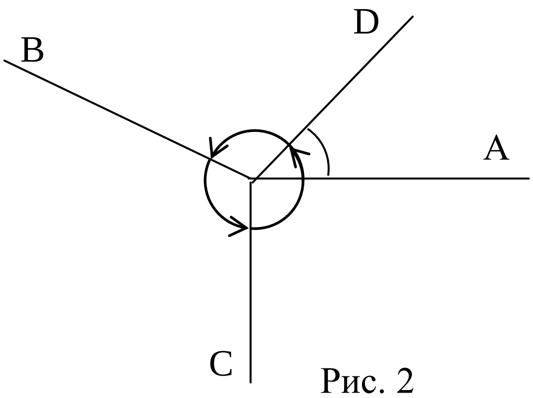


Рис. 2

5. На некотором острове каждый житель либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Трое островитян А, Б, В сказали следующее:

   А: «Б – лжец»;

   Б: «ровно один из А и В лжец»;

   В: «у меня есть крокодил».

   Есть ли у В крокодил?

   <u>Ответ</u>. Да, есть.

   <u>Решение</u>.

   <u>Первый способ.</u> 1) Пусть А говорит правду. Тогда Б – лжец. Тогда А и В оба лжецы или оба «правдивцы», но т.к. А – «правдивец», то и В «правдивец», т.е. крокодил у него есть.

2) Пусть А – лжец. Тогда Б – «правдивец». Тогда ровно один из А и В лжец, но т.к. А лжец, то В – «правдивец». Т.е. крокодил у него есть.
Таким образом, в обоих случаях получаем, что у В есть крокодил.
<u>Второй способ.</u> 1) Пусть Б «правдивец». Тогда ровно один из А и В лжец, но т.к. А говорит, что Б лжец, то А – лжец => В «правдивец» => крокодил у него есть.
2) Пусть Б лжец. Тогда оба А и В «правдивцы», или оба лжецы. Но А говорит, что Б лжец, т.е. говорят правду = > они оба (А и В) «правдивцы», т.е. у В есть крокодил.

6. Имеется 6 гирь: по паре зеленых, красных и белых. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая – легкая, причем все легкие весят одинаково и все тяжелые весят одинаково. Можно ли определить 3 тяжелые гири за два взвешивания на чашечных весах? (Чашечные весы показывают, равны ли веса грузов на чашках, а если не равны, то какая чашка тяжелее.)

<u>Ответ</u>. Да.
<u>Решение</u>. Обозначим зеленые гири $З_1$ и $З_2$, аналогично гири других цветов $К_1$, $К_2$, $Б_1$, $Б_2$. Первое взвешивание: $(К_1+Б_1) =? (К_2+З_1)$

1) *$(К_1+Б_1) = (К_2+З_1)$. Возможные варианты:*
   а) $К_1>К_2$ и $Б_1<З_1$; б) $К_1<К_2$ и $Б_1>З_1$. Вторым взвешиванием сравниваем Б1 и З1 и выясняем какая из них тяжелая, какая легкая и соответственно какая легкая, а какая тяжелая из $К_1$ и $К_2$.
2) *$(К_1+Б_1) < (К_2+З_1)$. В этом случае $К_1$ должна быть легче $К_2$, а $Б_1$ и $Б_2$ могут быть: а) равные и при этом обе легкие б) равные и при этом обе тяжелые, в) $Б_1$ легкая, $З_1$ – тяжелая. Вторым взвешиванием сравниваем $Б_1$ и $З_2$:*
   $Б_1<З_2$ => $Б_1$ – легкая, $З_1$ – легкая;
   $Б_1=З_2$ => $Б_1$ и $З_1$ разные, т.е. $Б_1$ легкая, т.е. легкие $Б_1$ и $З_2$;
   $Б_1>З_2$ => $Б_2$, $З_2$ – легкие.
3) *$(К_1+Б_1) > (К_2+З_1)$. Аналогично случаю 2)*

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Правильный пример – *7 баллов*. Если есть идея подбирать сумму О+Л+И+М+П+И так, чтобы она заканчивалась на 0: *2 балла*.
Задача 2. Только ответ – *1 балл*. Ответ на примере – *2 балла*. Далее в зависимости от полноты обоснований – от *3 до 7 баллов*.
Задача 3. Только ответ – *1 балл*. Верный ответ с проверкой (сказано, сколько должно весить каждое звено) – *3 балла*. Верно составлено уравнение, которое затем решается подбором – не более *5 баллов*.
Задача 4. За один из ответов 36^0 или 45^0, снабженный пояснениями (хотя бы в виде чертежей). – *3 балла*. Только один из ответов без пояснений *1 балл*. Оба ответа написаны, но нет никаких пояснений, – *3 балла*.
Задача 5. Только ответ «Да» – *0 баллов*. Разобран только один случай, например, что А – «правдивец»: *1 балл*.
Задача 6. Приведены верные взвешивания, из которых делаются правильные выводы какие гирьки тяжелые/легкие – *7 баллов*. Если хотя бы одно из взвешиваний неправильное (в итоге нельзя сделать однозначного вывода, какие гирьки какие) – *0 баллов*. Приведена только верная последовательность взвешиваний, но никаких выводов и пояснений, почему она работает, нет – *4 балла*.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2010
8 класс

1. Числитель дроби увеличили на 5, а знаменатель – на 2 (числитель и знаменатель – целые положительные числа). При этом значение дроби уменьшилось. Приведите пример, как такое могло произойти.

<u>Ответ</u>. Например, 10/3.

<u>Комментарий</u>. Подойдет любая дробь, большая чем 5/2.

2. Дано трехзначное число ABB. Если перемножить его цифры, то получится двузначное число AC, а если перемножить цифры AC, то получится C. Найдите исходное число.

<u>Ответ</u>. 144.
*<u>Решение</u>. Так как A*C=C, то A=1 или C=0.*
*Первый случай: A=1. Тогда A*B*B=B^2=1C, но есть только один квадрат между 10 и 20 – это 16, т.е. C=6. Откуда B=4. Т.е. исходное число 144: A=1, B=4, C=6.*
*Второй случай: C=0. Тогда A*B*B=A0=10A. Т.к. A – первая цифра, то A$\neq$0, можем сократить на A. Получим B^2=10 – нет решения.*
Таким образом, ответ единственный.

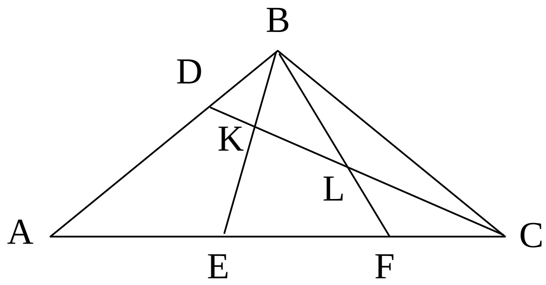
3. Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. Когда поезд отъезжал, каждый из них насчитал еще несколько скамеек, причем один из них насчитал в три раза больше, чем другой. А сколько насчитал третий?

<u>Ответ.</u> 7 скамеек.

<u>Решение</u>. Очевидно, что тот, кто до остановки проехал бо'льшую часть перрона, насчитал большее число скамеечек. Пусть первый насчитал 15 скамеек, второй 12, третий 7. Так как первый насчитал на 3 скамейки больше, чем второй, то, когда поезд будет отъезжать, второй увидит эти 3 скамейки, т.е. насчитает на 3 скамейки больше, чем первый. Аналогично третий насчитает на 8 скамеек больше, чем первый, и на 5 скамеек больше, чем второй. Раз кто-то насчитал в 3 раза больше, чем другой, то разница между насчитанными ими скамейками – четное число (3x-x=2x). В нашем случае разность насчитанных скамеек четна только между первым и третьим и она равна 8. Значит, первый насчитал 8:2=4 скамейки, тогда второй 4+3=7 скамеек.

<u>Замечание</u>. Можно было обойтись и без четности. Пусть первый насчитал x скамеек. Тогда второй x+3, а третий x+8. А дальше составить всевозможные пары и решить получившиеся три уравнения (один насчитал в три раза больше, чем другой в паре): 3x=x+3, 3x=x+8, 3(x+5)=x+8. Только одно из них имеет целое решение.

4. В треугольнике *ABC* (см. рисунок) CD – биссектриса угла ACB, AB=BC, BD=BK, BL=CL. Докажите, что BF – биссектриса угла CBE.



<u>Решение</u>. Обозначим $\angle BCD=\angle DCA=x$. Тогда $\angle BAC=2x$. $\angle BDC=\angle DAC+\angle DCA=3x$ => (треугольник BDK – равнобедренный) $\angle BKD=3x$. Для треугольника BKC $\angle BKD$ – внешний, откуда $\angle KBC=\angle BKD-\angle BCK=2x$. Так как BL=LC, $\angle LBC=\angle BCL=x$, т.е. BL – биссектриса в треугольнике KBC, а значит BF – биссектриса угла CBE.

5. Имеется 6 гирь: по паре зеленых, красных и белых. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая – легкая, причем все легкие весят одинаково и все тяжелые весят одинаково. Можно ли определить 3 тяжелые гири за два взвешивания на чашечных весах?

<u>Ответ</u>. Да.

<u>Решение</u>. Обозначим зеленые гири $З_1$ и $З_2$, аналогично гири других цветов $К_1$, $К_2$, $Б_1$, $Б_2$. Первое взвешивание: $(К_1+Б_1) =? (К_2+З_1)$

1) *$(К_1+Б_1) = (К_2+З_1)$. Возможные варианты:*
   а) $К_1>К_2$ и $Б_1<З_1$; б) $К_1<К_2$ и $Б_1>З_1$. Вторым взвешиванием сравниваем Б1 и З1 и выясняем какая из них тяжелая, какая легкая и соответственно какая легкая, а какая тяжелая из $К_1$ и $К_2$.
2) *$(К_1+Б_1) < (К_2+З_1)$. В этом случае $К_1$ должна быть легче $К_2$, а $Б_1$ и $Б_2$ могут быть: а) равные и при этом обе легкие б) равные и при этом обе тяжелые, в) $Б_1$ легкая, $З_1$ – тяжелая. Вторым взвешиванием сравниваем $Б_1$ и $З_2$:*
   $Б_1<З_2$ => $Б_1$ – легкая, $З_1$ – легкая;
   $Б_1=З_2$ => $Б_1$ и $З_1$ разные, т.е. $Б_1$ легкая, т.е. легкие $Б_1$ и $З_2$;
   $Б_1>З_2$ => $Б_2$, $З_2$ – легкие.

3) ($К_1$+$Б_1$) > ($К_2$+$З_1$). Аналогично случаю 2)

6. У каждого трехзначного числа нашли произведение его цифр. Получилось 900 произведений от $1\cdot 0\cdot 0$ до $9\cdot 9\cdot 9$. Чему равна их сумма?

<u>Ответ</u>. 45^3=91125.
<u>Решение</u>. Достаточно заметить, что если мы раскроем скобки в произведении (1+2+…+9)·(0+1+2+…+9)·(0+1+2+…+9), то получим как раз 900 перечисленных в условии слагаемых, а все три суммы, стоящие в скобках, равны 45.

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

<u>Задача</u> 1. Правильный пример дроби – *7 баллов*.
<u>Задача</u> 2. Правильный ответ – *1 балл*.
Верно разобран случай А=1, случай С=0 потерян – *3 балла*.
Случай А разобран верно, в обосновании невозможности случая С=0 есть те или иные погрешности *4-6 баллов*.
<u>Задача</u> 3. Голый ответ – *2 балла*. Решение перебором по возможным парам (кто насчитал в три раза больше, чем другой), но какая-то пара из трех потеряна – не более *3 баллов*.
<u>Задача</u> 5. Приведены верные взвешивания, из которых делаются правильные выводы какие гирьки тяжелые/легкие – *7 баллов*. Если хотя бы одно из взвешиваний неправильное (в итоге нельзя сделать однозначного вывода, какие гирьки какие) – *0 баллов*. Приведена только верная последовательность взвешиваний, но никаких выводов и пояснений, почему она работает, нет – *4 балла*.

<u>Задача</u> 6. За ответ без обоснования – *3 балла*. С другой стороны, не надо требовать более подробного обоснования, чем в приведенном решении. Вычислять 45^3 не требуется.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2010
9 класс

1. Придумайте такое нецелое число, что 15% и 33% от него – целые числа.

<u>Ответ</u>. Например, 100/3.

2. Туристам-байдарочникам нужны восемь одинаковых «сидушек» – мягких ковриков длиной не менее 35 см и шириной не менее 20 см. В спортивном магазине продаются большие коврики длиной 110 см и шириной 56 см. Хватит ли большого коврика на восемь «сидушек»?

<u>Ответ</u>. Да, хватит.

<u>Решение</u>. Разрежем большой коврик на два куска размерами 110х20 и 110х36. Из первого куска можно вырезать 3 «сидушки» размером 35х20 (и даже 36х20), а из второго куска – 5 «сидушек» размером 35х20 (и даже 36х22).

*<u>Комментарий</u>. Подсчет и сравнение площадей: 110*56=6160 – площадь большого ковра, 8*(35*20)=5600 – суммарная площадь маленьких, 6160>5600 – обоснованием не является. Например, большой ковер мог быть шириной 10 см, а длиной – километр. Его площади хватило бы, однако ни одной «сидушки» из него вырезать нельзя.*

3. Бумажный треугольник разрезали на два многоугольника прямолинейным разрезом, один из полученных многоугольников вновь разрезали на два и т. д. Какое наименьшее количество разрезов следует произвести, чтобы суммарное количество вершин у полученных многоугольников стало равно 400? Как это сделать?

<u>Ответ</u>. 100 разрезов.
<u>Решение</u>. Все получающиеся многоугольники выпуклые. Каждый разрез может идти:
а) из вершины в вершину;
б) из вершины к стороне;
в) от стороны к стороне.
В первом случае суммарное число вершин увеличивается на две, во втором – на три, в третьем – на 4. Таким образом, за один разрез общее число вершин может увеличиться максимум на 4. Изначально у нас есть 3 вершины. Если разрезов было 99 или

*меньше, то общее число вершин будет 3+99*4=399<400. Таким образом, 99 разрезов не хватит.*

*Чтобы получить 400 частей за 100 разрезов достаточно сделать 97 разрезов типа в – от стороны к стороне, и 3 разреза типа б – из вершины к стороне. Итого получится 3+97*4+3*3=400 частей.*

Комментарий. *Возможны и другие способы разрезания.*

4. У разбойников есть 13 слитков золота. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух слитков. Придумайте, как за 8 взвешиваний выяснить суммарный вес всех слитков.

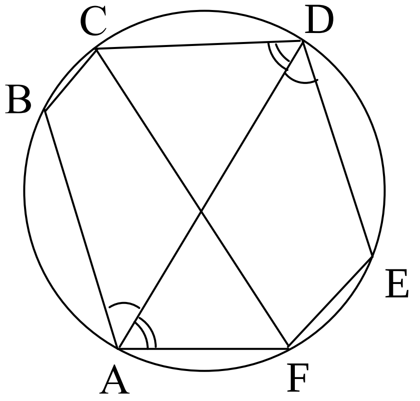
Решение. *Возьмем три первых слитка и взвесим их попарно: C_1+C_2, C_1+C_3, C_2+C_3, затратив три взвешивания. Сложив результаты этих взвешиваний и поделив пополам, найдем суммарный вес этих трех слитков: $((C_1+C_2)+(C_1+C_3)+(C_2+C_3))/2 = C_1+C_2+C_3$. За оставшиеся пять взвешиваний найдем вес остальных 10 слитков: объединим их в 5 пар и взвесим каждую пару.*

5. У каждого трехзначного числа нашли произведение его цифр. Получилось 900 произведений от $1\cdot 0\cdot 0$ до $9\cdot 9\cdot 9$. Чему равна их сумма?

Ответ. *45^3=91125.*

Решение. *Достаточно заметить, что если мы раскроем скобки в произведении (1+2+…+9)·(0+1+2+…+9) ·(0+1+2+…+9), то получим как раз 900 перечисленных в условии слагаемых, а все три суммы, стоящие в скобках, равны 45.*

6. Шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность. Докажите, что если *AB*||*DE*, *AF*||*DC*, то и *BC*||*EF*.



Решение. *Так как AB||DE, то $\angle BAD=\angle ADE$, а т.к. AF||CD, то $\angle DAF=\angle ADC$.*

Так как четырехугольник ABCF – вписанный, то $\angle BAF+\angle BCF=180^0$. Аналогично, т.к. четырехугольник CDEF – вписанный, то $\angle CDE+\angle CFE=180^0$. Так как $\angle BAF=\angle CDE$ (как суммы равных углов), то $\angle BCF=\angle CFE$, а значит, прямые BC и EF параллельны.

Замечание. Можно было не использовать вписанные четырехугольники, а просто выразить оба угла BCF и CFE через дуги.

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Правильный пример – *7 баллов*.

Задача 2. Ответ без обоснования или с обоснованием, что площади хватает – *0 баллов*. Ответ с объяснением, как резать – *7 баллов*.

Задача 3. В задаче нужно сделать две вещи: 1) доказать оценку – что меньшим числом разрезаний не обойтись; 2) привести пример на данное число разрезаний. Если сделана только какая-то одна из этих двух вещей – *3 балла*.
Только ответ «100 разрезаний» – *1 балл*.

Задача 4. Правильные взвешивания и объяснение, как по их результатам узнать суммарный вес слитков – *7 баллов*. Если используется запрещенное взвешивание (например, в какой-то момент взвешивается только один слиток) – *0 баллов*.

Задача 5. За ответ без обоснования – *3 балла*. С другой стороны, не надо требовать более подробного обоснования, чем в приведенном решении. Вычислять 45^3 не требуется.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2010
10 класс

1. Придумайте такое нецелое число, что 15% и 33% от него – целые числа.

Ответ. Например, 100/3.

2. Найдите сумму: $100^2–99^2+98^2–97^2+...+2^2–1^2$.

Решение.

По формуле разности квадратов $100^2–99^2 = 100+99$; $98^2–97^2=98+97$; $96–95 = 96+95$; …

Поэтому $100^2–99^2+98^2–97^2+...+2^2–1^2 = 100+99+98+97+96+95+..+2+1=(100+1)*100/2=5050$.

Комментарий. Возможны и другие способы подсчета.

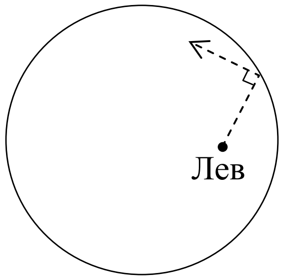
3. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Федота Бурчеева, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Федот?

Ответ. 7 рукопожатий.

*Решение. Если каждый из n человек пожмет руки всем остальным, то все сделают по n-1 рукопожатий, а всего рукопожатий будет сделано n(n-1)/2, ибо в каждом из них участвуют двое. Посмотрим, сколько могло быть людей, кроме Федота. Заметим, что если 20 человек пожмут руки друг другу, то всего будет сделано 190 рукопожатий. Т.е. Федоту останется сделать 7 рукопожатий. Если же без Федота было менее 20 человек, то они сделали без него не более 19*18/2=171 рукопожатие, т.е. на долю Федота осталось бы не менее 26 рукопожатий, а человек, кому он мог бы пожать руку – не более 19 – противоречие. Если же без Федота было больше 20 человек, то только они одни в сумме сделали бы больше 197 рукопожатий (21*20/2=210>197). Таким образом, ответ единственный – Федот сделал 7 рукопожатий.*

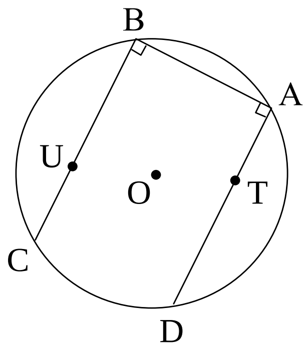
4. На круглой арене цирка (но не в ее центре) стоит тумба, на которой сидит лев. По команде укротителя лев спрыгивает с тумбы и бежит по прямой. Добежав до бортика, он поворачивает на 90^0, снова добегает до бортика, поворачивает

на 90^0 и т.д. Докажите, что на арене (но не на тумбе) можно положить кусочек мяса так, что, независимо от первоначального направления движения, лев съест мясо. (Лев съедает мясо, если его путь проходит через точку, в которой оно лежит.)



<u>Ответ</u>. Мясо надо положить в точку, симметричную тумбе относительно центра окружности.

<u>Решение</u>. Пусть тумба находится в точке T. Тогда лев движется вдоль ломаной TABC (см. рисунок). Продолжим AT до пересечения с окружностью в точке D. Так как хорды BC и AD перпендикулярны хорде AB, они симметричны относительно центра окружности. (Действительно, AC – диаметр, т.к. он виден из точки B под прямым углом. Аналогично BD диаметр. Значит, точка их пересечения – центр окружности и центр симметрии прямоугольника ABCD.) Следовательно, независимо от начального направления, лев пройдет через точку U, симметричную точке T относительно центра окружности.



5. У каждого трехзначного числа нашли произведение его цифр. Получилось 900 произведений от $1\cdot 0\cdot 0$ до $9\cdot 9\cdot 9$. Чему равна их сумма?

<u>Ответ</u>. 45^3=91125.
<u>Решение</u>. Достаточно заметить, что если мы раскроем скобки в произведении (1+2+…+9)·(0+1+2+…+9) ·(0+1+2+…+9), то получим как раз 900 перечисленных в условии слагаемых, а все три суммы, стоящие в скобках, равны 45.

6. Был квадратный трехчлен $x^2+10x+12$. За один ход разрешается менять на единицу свободный член или коэффициент при x. После нескольких таких операций получили трехчлен $x^2+12x+10$. Докажите, что в некоторый момент был трехчлен с целым корнем.

Решение. Заметим, что -1 является корнем квадратного трехчлена $x^2+(n+1)x+n$, т.е. приведенного трехчлена, у которого коэффициент при х на 1 больше свободного члена. В изначальном трехчлене коэффициент при х меньше свободного члена, а в конечном – больше. А так как изменять мы можем только один из них на единицу, значит, в некоторый момент коэффициент при х был на 1 больше.

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Правильный пример – *7 баллов*.

Задача 2. Только ответ без обоснования, как он найден, – *2 балла*.

За представление выражения в виде суммы арифметической прогрессии – *2 балла*. После этого арифметическая ошибка (но не ошибка при подсчете количества слагаемых/пар и не ошибка в формуле, которые арифметическими не считаются) – *5 баллов*.

Задача 3. Только ответ «7» без обоснования – *1 балл*. Ответ с проверкой – 3 *балла*.

Задача 4. Ответ: «мясо нужно положить в точку, симметричную тумбе относительно центра арены», без достаточных обоснований, почему она годится – *3 балла*.

Задача 5. За ответ без обоснования – *3 балла*. С другой стороны, не надо требовать более подробного обоснования, чем в приведенном решении. Вычислять 45^3 не требуется, если такое вычисление есть и в нем допущена ошибка, оценка не снижается.

Задача 6. Сказано, что обязательно будет корень -1, но не сказано почему – *2 балла*.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2010
11 класс

1. Придумайте такое нецелое число, что 15% и 33% от него – целые числа.

<u>Ответ</u>. Например, 100/3.

2. Найдите сумму: $100^2–99^2+98^2–97^2+...+2^2–1^2$.

<u>Решение</u>.

По формуле разности квадратов $100^2–99^2 = 100+99$; $98^2–97^2=98+97$; 96–95 = 96+95; …

*Поэтому $100^2–99^2+98^2–97^2+...+2^2–1^2$ = 100+99+98+97+96+95+..+2+1=(100+1)*100/2=5050.*

3. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Федота Бурчеева, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Федот?

<u>Ответ</u>. 7 рукопожатий.

*<u>Решение</u>. Если каждый из n человек пожмет руки всем остальным, то все сделают по n-1 рукопожатий, а всего рукопожатий будет сделано n(n-1)/2, ибо в каждом из них участвуют двое. Посмотрим, сколько людей могло быть без Федота. Заметим, что если 20 человек пожмут руки друг другу, то всего будет сделано 190 рукопожатий. Т.е. Федоту останется сделать 7 рукопожатий. Если же без Федота было менее 20 человек, то они сделали без него не более 19*18/2=171 рукопожатие, т.е. на долю Федота осталось бы не менее 26 рукопожатий, а человек, кому он мог бы пожать руку – не более 19 – противоречие. Если же без Федота было больше 20 человек, то только они одни в сумме сделали бы больше 197 рукопожатий (21*20/2=210>197). Таким образом, ответ единственный – Федот сделал 7 рукопожатий.*

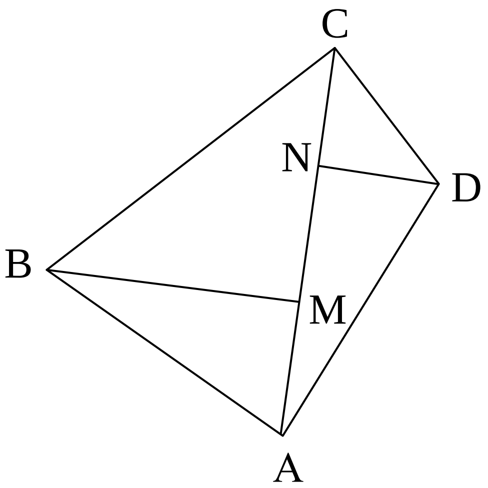
4. Докажите, что для любых x и y справедливо неравенство:

$$\sin x \cos y + 1 \geq \sin x + \cos y$$

<u>Решение</u>. Преобразуем: $\sin x(\cos y - 1) + 1 - \cos y \geq 0$, $(\cos y - 1)(\sin x - 1) \geq 0$. *Последнее неравенство всегда верно, ибо* $\cos y, \sin x \leq 1$.

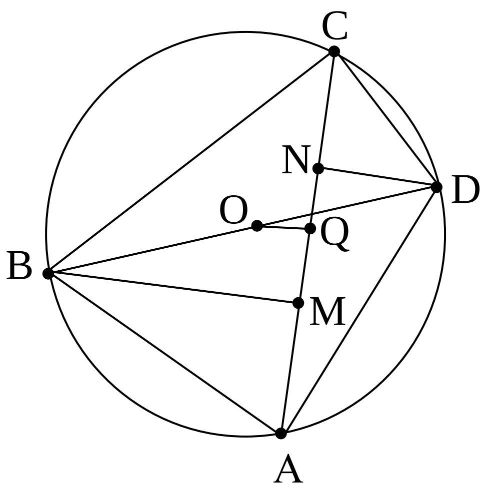
5. В четырехугольнике *ABCD* углы *A* и *C* – прямые. Из точек *B* и *D* опустили перпендикуляры на диагональ *AC* и получили соответственно точки *M* и *N*. Докажите, что *AM=CN*.

<u>Решение</u>.



Треугольники BMC и CND – прямоугольные, при этом их острые углы BCN и DCN в сумме дают 90^0*, следовательно* $\angle BCN = \angle CDN$*, т.е. треугольники подобны. Аналогично подобны треугольники BAM и ADN. Из подобия первой пары треугольников получаем, что CM/DN=BM/NC. Из подобия второй – что DN/MA=AN/BM. Перемножая эти равенства, получаем: CM/MA=AN/NC, откуда сразу можно заметить, что точки M и N делят отрезок AC в равных отношениях, но одна, считая от точки A, а другая, считая от точки C. Значит, соответствующие отрезки AM и CN равны. Можно также вывести это явно: CM·NC =AN·MA => (AC-AM)NC=(AC-CN)MA => AC·NC =AC·MA =>NC=MA.*

<u>Второе решение</u>. Обозначим середину отрезка NM через Q. Нетрудно видеть, что утверждение задачи равносильно тому, что Q – середина и отрезка AC. Заметим, что по теореме Фалеса точка Q есть основание перпендикуляра OQ, опущенного на CA из середины отрезка BD. Но, так как отрезок BD виден из точек A и C под прямыми углами, AC – хорда окружности с центром в точке O. А значит, OQ действительно делит отрезок AC пополам (как радиус, перпендикулярный хорде).



6. Существует ли одиннадцатигранник (не обязательно выпуклый), у которого каждая грань – многоугольник с четным числом сторон?

Ответ. Да, существует.
Решение.
Заметим, что если из куба вырезать кубик поменьше (оба куба имеют общий трехгранный угол) – см. рисунок 1, получится 9-гранник, у которого все грани – чётноугольники. А чтобы получился 11-гранник вместо большого куба возьмем шестиугольную призму – см. рисунок 2.

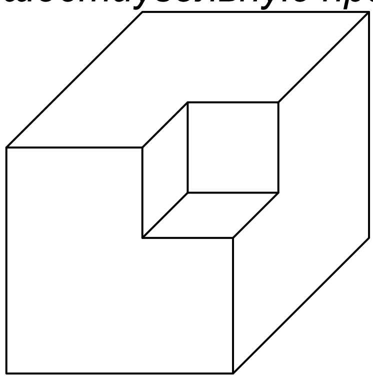


Рис. 1.1

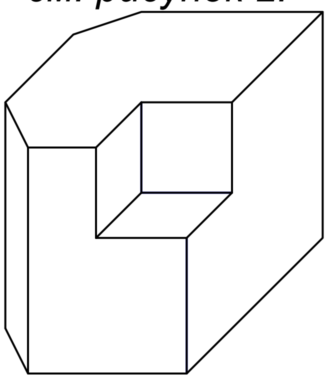


Рис. 1.2

Другой пример. Рассмотрим многогранник в виде объемной буквы Т – см. рис.1. Срежем у него часть «ножки», как показано на рисунке 2. Получим 11-гранник, у которого нижняя грань 8-угольник, а остальные грани четырехугольные.

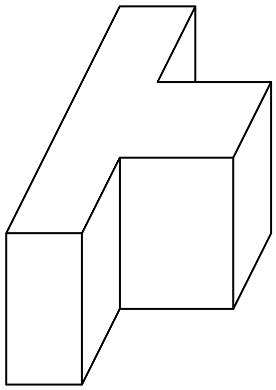


Рис. 2.1

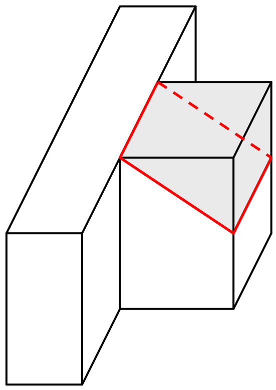


Рис. 2.2

<u>Комментарий</u>. Кроме многогранников, изображенных на рис. 1.2 и 2.2 есть и другие примеры.

Комментарии по проверке

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

<u>Задача</u> 1. Правильный пример – *7 баллов*.

<u>Задача</u> 2. Только ответ без обоснований, как он найден, – *2 балла*.

За представление выражения в виде суммы арифметической прогрессии – *2 балла*. После этого арифметическая ошибка (но не ошибка при подсчете количества слагаемых/пар или ошибка в формуле, которые арифметическими не считаются) – *5 баллов*.

<u>Задача</u> 3. Только ответ «7» без обоснования – *1 балл*. Ответ с проверкой – 3 балла.

<u>Задача</u> 6. Ответ «Да» – *0 баллов*. У многогранника могут быть грани, являющиеся «многоугольниками с дырками», оценка за это не снижается.