

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант №327

Уровень 2

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». Всего в работе 25 заданий. Модуль «Алгебра» содержит семнадцать заданий: в части 1 — четырнадцать заданий; в части 2 — три задания. Модуль «Геометрия» содержит восемь заданий: в части 1 — пять заданий; в части 2 — три задания.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 записываются в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Эту цифру запишите в поле ответа в тексте работы.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр, которые нужно записать в поле ответа в тексте работы. Если в ответе получена обыкновенная дробь, обратите её в десятичную.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе или бланке. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами.

Баллы, полученные Вами за выполненные верно задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

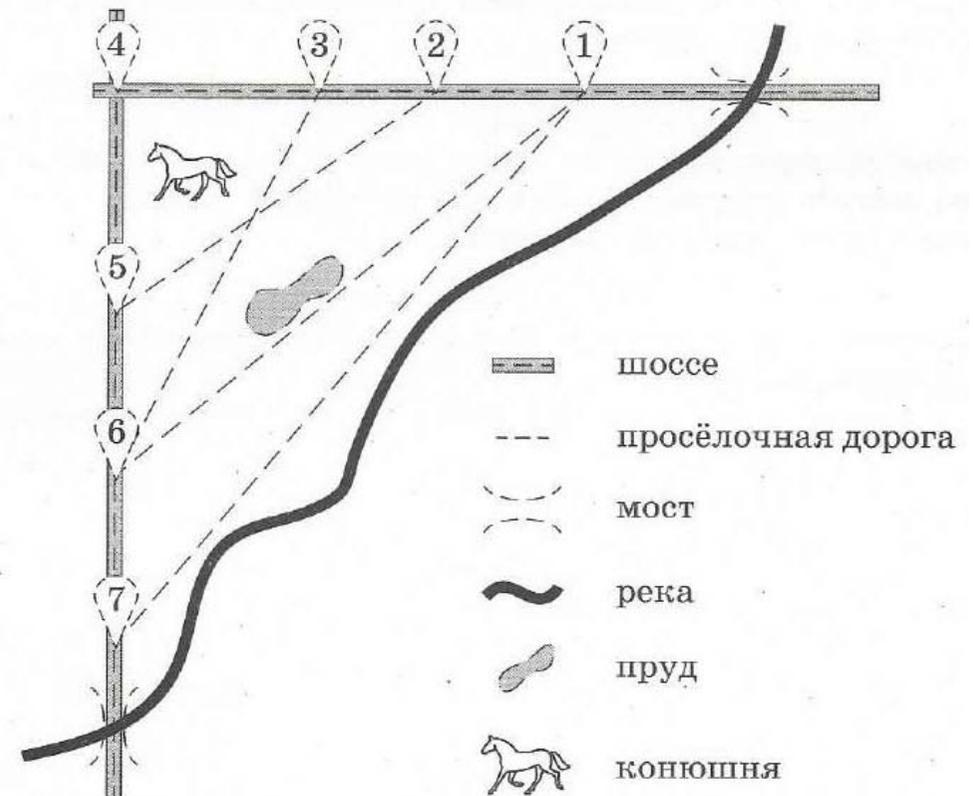
Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1 – 19 являются цифра, число или последовательность цифр, которые следует вписать в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов, запятых и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Модуль «Алгебра»

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5



На рисунке (см. выше) изображён план сельской местности.

Таня на летних каникулах приезжает в гости к дедушке в деревню Антоновку (на плане

изображена цифрой 1). В конце каникул дедушка на машине собирается отвезти Таню на автобусную станцию, которая находится в деревне Богданово. Из Антоновки в Богданово можно проехать по просёлочной дороге вдоль реки. Есть другой путь – по шоссе до деревни Ванютино, где нужно повернуть под прямым углом налево на другое шоссе, ведущее в Богданово. Третий маршрут проходит по просёлочной дороге мимо пруда до деревни Горюново, где можно свернуть на шоссе до Богданово. Четвёртый маршрут пролегает по шоссе до деревни Доломино, от Доломино до Горюново по просёлочной дороге мимо конюшни и от Горюново до Богданово по шоссе. Ещё один маршрут проходит по шоссе до деревни Егорки, по просёлочной дороге мимо конюшни от Егорки до Жилино и по шоссе от Жилино до Богданово.

Шоссе и просёлочные дороги образуют прямоугольные треугольники.

По шоссе Таня с дедушкой едут со скоростью 50 км/ч, а по просёлочным дорогам – со скоростью 30 км/ч. Расстояние от Антоновки до Доломино равно 12 км, от Доломино до Егорки – 4 км, от Егорки до Ванютино – 12 км, от Горюново до Ванютино – 15 км, от Ванютино до Жилино – 9 км, а от Жилино до Богданово – 12 км.

1. Пользуясь описанием, определите, какими цифрами на плане обозначены деревни.

Заполните таблицу. В ответе запишите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других разделительных символов.

| Деревни | д. Богданово | д. Горюново | д. Доломино | д. Егорка |
|---------|--------------|-------------|-------------|-----------|
| Цифры | | | | |

Ответ: _____.

2. Найдите расстояние (в км) от Антоновки до Богданово по прямой.

Ответ: _____.

3. Сколько минут затратят на дорогу Таня с дедушкой из Антоновки в Богданово, если поедут через Егорку и Жилино мимо конюшни?

Ответ: _____.

4. За какое наименьшее количество минут Таня с дедушкой могут добраться из Доломино в Горюново?

Ответ: _____.

5. На просёлочных дорогах машина дедушки расходует 8,2 литра бензина на 100 км. Известно, что на путь из Антоновки до Богданово через Ванютино и путь напрямик ей необходим один и тот же объём бензина. Сколько литров бензина на 100 км машина дедушки расходует на шоссе?

Ответ: _____.

6. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{36\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[10]{b}}$ при $b > 0$.

Ответ: _____.

7. Пусть a, b, c – действительные положительные числа. Причём $abc = 1$. Найдите наибольшее значение выражения:

$$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{a}{b} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a}.$$

В ответе запишите номер правильного варианта ответа.

1) 2

2) 3

3) 4

4) 5

Ответ: _____.

8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \cdot \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right)$ при $x = \frac{1}{113}$.

Ответ: _____.

9. Решите в действительных числах уравнение:

$$\frac{x-7}{x-1} + \frac{x+7}{x+1} - \frac{x-14}{x-2} - \frac{x+14}{x+2} = 0.$$

В ответе запишите корень этого уравнения.

Ответ: _____.

10. В семейном альбоме есть десять фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины – его сын, а справа – его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если известно, что все десять мужчин, стоящих в центре, различны?

Ответ: _____.

11. На множестве действительных чисел $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ задана функция $f(x)$. Также известно, что эта функция при любых действительных значениях $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ удовлетворяет уравнению:

$$(f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x.$$

Установите соответствие между выражениями для значений функции $f(x)$ и значениями этой функции. В ответе укажите последовательность трёх цифр, соответствующих А, Б, В, без пробелов, запятых и других разделительных символов.

А) $f(-10)$

Б) $f(-19)$

В) $f(-18)$

1) $\sqrt[3]{\frac{900}{11}}$

2) $-3\sqrt[3]{\frac{204}{19}}$

3) $\sqrt[3]{\frac{3249}{10}}$

Ответ: _____.

12. Площадь S треугольника со сторонами a , b , c можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Найдите площадь треугольника со сторонами 11, 25, 30.

Ответ: _____.

13. Решите в действительных числах неравенство:

$$x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x \leq \frac{512^2 - 1}{512}.$$

В ответе укажите номер правильного варианта ответа.

- 1) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ 2) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$
 3) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ 4) $\left(-\infty; \sqrt[3]{2}\right]$

Ответ: _____.

14. Врач прописал пациенту принимать лекарство по такой схеме: в первый день он должен принять 3 капли, а в каждый следующий день — на 3 капли больше, чем в предыдущий. Приняв в день 30 капель, он ещё 3 дня пьёт по 30 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает приём на 3 капли. Сколько пузырьков лекарства нужно купить пациенту на весь курс приёма, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

Ответ: _____.

Модуль «Геометрия»

15. В треугольнике ABC , стороны которого $BC = 3$, $AC = 5$ и $AB = 7$, проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM = BN$. Найдите MN .

Ответ: _____.

16. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C .

Известно, что $\angle BAC = \arccos \frac{1}{3}$, биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K . На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите тангенс угла AMK .

Ответ: _____.

17. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 6 и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен 30° . Найдите длину меньшей диагонали параллелограмма.

Ответ: _____.

18. В трапеции $ABCD$ (BC параллельна AD) известно, что $AB = 5$ и расстояние от середины отрезка CD до прямой AB равно 7. Найдите площадь трапеции.

Ответ: _____.

19. Какие из следующих утверждений верны? Если верных утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания без пробелов, запятых и других разделительных символов.

- 1) Все углы ромба равны
- 2) Если стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники равны.
- 3) Через любую точку, лежащую вне закрытого диска, ограниченного окружностью ω , можно провести две касательные к окружности ω .

Ответ: _____.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте бланк ответов №2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Модуль «Алгебра»

20. Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ y^2 + z = 2 \\ z^2 + x = 2 \end{cases}$$

21. Известно, что a, b, c, d – попарно различные двузначные натуральные числа.

Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 8d$?

22. Найдите все пары действительных чисел (a, b) , при каждом из которых неравенство

$$2a(x+2)^4 + 9b(x-2)^4 \geq x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех действительных значений x .

Модуль «Геометрия»

23. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ – векторы сторон n -угольника, $\varphi_{ij} = \angle(\vec{a}_i, \vec{a}_j)$. Найдите

значение выражения $\frac{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - \dots - a_n^2}{\sum_{i>j>1} (a_i a_j \cos \varphi_{ij})}$, где $a_i = |\vec{a}_i|$.

24. Длины всех сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, причем наибольший общий делитель этих чисел равен 1. Докажите, что его катеты равны $2mn$ и $m^2 - n^2$, где m и n – целые положительные числа.

25. Для каких $n \geq 4$ существует выпуклый n -угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей – целые числа?