C1 Найдите точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{(x^2-6x)(x^2-12x+36)}{2x-12}$.

Решение:

1) $f(x)=\dfrac{x(x-6)(x^2-12x+36)}{2(x-6)}$, то есть $f(x)=\dfrac{1}{2}(x^3-12x^2+36x)$ при $x\neq 6$.

2) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-24x+36)=\dfrac{3}{2}(x^2-8x+12)=\dfrac{3}{2}(x-6)(x-2)$ при $x\neq 6$.
$f'(x)=0$ при $x=2$.

Функция $y=f(x)$ имеет единственную точку экстремума — точку максимума $x=2$.

Ответ: точка максимума, $x=2$.

C2 Решите систему:

$$\begin{cases}\sqrt{1-2\sin^4\frac{y}{2}-2\cos^4\frac{y}{2}}+x^2-8\pi x+16\pi^2=0,\\ \pi<\log_2 3\cdot\log_3 2^{x+y}<2\pi.\end{cases}$$

<u>Решение:</u>

1) $\sqrt{1-2\sin^4\frac{y}{2}-2\cos^4\frac{y}{2}}=\sqrt{1-2\left(\sin^4\frac{y}{2}+\cos^4\frac{y}{2}\right)}=$

$=\sqrt{1-2\left(\left(\sin^2\frac{y}{2}+\cos^2\frac{y}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}\right)}=$

$=\sqrt{1-2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 y\right)}=\sqrt{\sin^2 y-1}=\sqrt{-\cos^2 y}$

Данное выражение определено при условии, что $\cos y=0$, то есть при $y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. В остальных случаях выражение не определено.

Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2-8\pi x+16\pi^2=0,\\ y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\end{cases}\quad \begin{cases}x=4\pi,\\ y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

2) $\log_2 3\cdot\log_3 2^{x+y}=(x+y)\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=(x+y)\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}=x+y.$

$x+y=4\pi+\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

$\pi<4\pi+\frac{\pi}{2}+\pi n<2\pi,\ n\in Z.$

Тогда $1<4{,}5+n<2,\ n\in Z.$

$-3{,}5<n<-2{,}5,\ n\in Z.$

Поэтому $n=-3$.

Решение системы: $\begin{cases}x=4\pi,\\ y=-\frac{5\pi}{2}\end{cases}$

Ответ: $\left(4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right)$.

0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С3 Найдите все значения $x > 4$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_5(x-3) + 2\log_{x-3}625 - 2$ и $b = 148 - \log_5^2(x-3)^4$ больше 4.

<u>Решение:</u>

1) Наибольшее из двух чисел больше 4 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них больше 4. Поэтому необходимо решить следующую совокупность: $\left[\begin{array}{l} a > 4, \\ b > 4. \end{array}\right.$

2) $a > 4 \Leftrightarrow \log_5(x-3) + 2\log_{x-3}625 - 2 > 4 \Leftrightarrow \log_5(x-3) + 8\log_{x-3}5 - 6 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-3) + \frac{8}{\log_5(x-3)} - 6 > 0.$$

Пусть $t = \log_5(x-3)$. Из условия $x > 4$ следует, что $t > 0$. Тогда $t^2 - 6t + 8 > 0$, то есть $0 < t < 2$ или $t > 4$.

$b > 4 \Leftrightarrow 148 - \log_5^2(x-3)^4 > 4 \Leftrightarrow \log_5^2(x-3)^4 < 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12 < \log_5(x-3)^4 < 12 \Leftrightarrow -12 < 4\log_5(x-3) < 12 \Leftrightarrow -3 < \log_5(x-3) < 3.$

Тогда $0 < t < 3$.

Получаем совокупность $\left[\begin{array}{l} 0 < t < 2, \\ t > 4, \\ 0 < t < 3, \end{array}\right.$ откуда $0 < t < 3$ или $t > 4$.

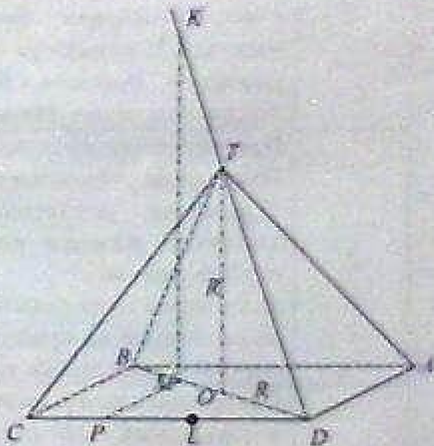
3) Из неравенства $0 < \log_5(x-3) < 3$ получаем: $4 < x < 128$. Из неравенства $\log_5(x-3) > 4$ получаем $x > 628$.

<u>**Ответ:**</u> $(4;\ 128) \cup (628;\ +\infty)$.

	Ответ не получен или неверен.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1-4 балла.

C4 Около правильной пирамиды $TABCD$ описана сфера радиуса 3, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$ пирамиды. Точка L лежит на ребре CD так, что $DL:LC=2:3$. Точка K лежит на прямой DT и равноудалена от точек L и C. Найдите объем пирамиды $KABLD$.

<u>Решение:</u>



1) Пусть O – центр сферы радиуса R, описанной около пирамиды $TABCD$. Так как $OA=OB=OC=OD=OT=R$, а $O\in ABC$, то точка O – является также центром окружности радиуса R, описанной около квадрата $ABCD$, то есть точкой пересечения его диагоналей. Тогда $AB=R\sqrt{2}$.

2) $TABCD$ – правильная пирамида, поэтому TO – высота пирамиды и $BTO\perp ABC$. По условию $K\in DT$ и $KL=KC$. Опустим из точки K перпендикуляр KM на прямую BO. Так как $BTO\perp ABC$, то $KM\perp ABC$, и следовательно, KM – высота пирамиды $KABLD$, а отрезки ML и MC – проекции равных наклонных KL и KC. Значит, $ML=MC$, и поэтому треугольник MLC – равнобедренный с основанием LC, а его высота MP является медианой, то есть $PL=PC$.

C5 Решите уравнение $f(f(x)) = f\left(x^2 + 4x + 9\right)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 25 - 4t + 5|t - 5|, & t > 0, \\ 6t - 5t^2 + 3t^3, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

<u>**Решение.**</u>

1) При $x \geqslant 5$ имеем $f(x) = 25 - 4x + 5(x - 5) = x \geqslant 5$, поэтому $f(f(x)) = f(x) = x$,
а $f\left(x^2 + 4x + 9\right) = x^2 + 4x + 9$ (при всех x) и уравнение принимает вид
$x = x^2 + 4x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 9 = 0$. Таким образом, исходное уравнение при $x \geqslant 5$ корней не имеет.

2) При $0 < x < 5$ имеем
$f(x) = 25 - 4x + 5(-x + 5) = 50 - 9x > 5$, $f(f(x)) = f(x) = 50 - 9x$,
поэтому уравнение принимает вид

$$50 - 9x = x^2 + 4x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 13x - 41 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{333}}{2}.$$

Условию $0 < x < 5$ удовлетворяет только один корень $x = \dfrac{\sqrt{333} - 13}{2}$.

3) При $x \leqslant 0$ уравнение не имеет корней, так как функция f возрастает (как сумма возрастающих функций) и

$$f(x) \leqslant f(0) = 0 \Rightarrow f(f(x)) \leqslant f(0) = 0 < f\left(x^2 + 4x + 9\right).$$

<u>**Ответ:**</u> $\dfrac{\sqrt{333} - 13}{2}$.