

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

17 Из формулы $L = \frac{m}{q^2}$, в которой все величины положительны, выразите q .

Ответ: $q = \sqrt{\frac{m}{L}}$.

18 Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 10$ и прямой $y = 4x + 11$.

Ответ: $(-3; -1), (7; 39)$.

19 Найдите значение выражения $\frac{(4x)^3 \cdot x^{-11}}{x^{-12} \cdot 5x^5}$ при $x = 2$.

Преобразуем выражение: $\frac{(4x)^3 \cdot x^{-11}}{x^{-12} \cdot 5x^5} = \frac{4^3}{5} \cdot x^{3-11+12-5} = \frac{64}{5}x^{-1}$.

При $x = 2$ получаем: $\frac{64}{5} \cdot 2^{-1} = \frac{32}{5} = 6,4$.

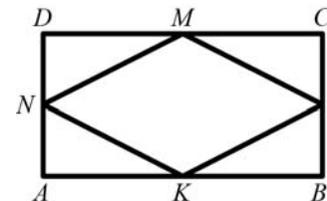
Ответ: 6,4.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Преобразования и подстановка выполнены верно, получен верный ответ.	2
Преобразования выполнены верно, при выполнении подстановки допущена описка или ошибка вычислительного характера. С учетом этого выполнение задания доведено до ответа.	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

20 Середины сторон параллелограмма являются вершинами ромба. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

Пусть точки K, L, M, N – середины сторон $AB, BC, CD, и DA$ параллелограмма $ABCD$ соответственно (1) $BL=CL$ т.к. L – середина BC ; 2) $KB=MC$, т.к. $AB=CD$ как противоположные стороны параллелограмма, а K и M – середины этих сторон; 3) $KL=ML$ как стороны ромба).

Тогда треугольники KBL и LCM равны по трем сторонам. Это означает, что угол KBL равен углу MCL . Но эти углы в сумме дают 180° , поэтому каждый из них равен 90° . Таким образом, углы параллелограмма прямые. Значит, он прямоугольник.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

21 Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Обозначим x км/ч искомую скорость. По течению реки лодка двигалась $\frac{36}{x+3}$ ч.

Против течения лодка шла $\frac{36}{x-3}$ ч. Получаем уравнение

$$\frac{36}{x-3} + \frac{36}{x+3} = 5.$$

Решим его:

$$\frac{72x}{(x-3)(x+3)} = 5; \begin{cases} 5x^2 - 72x - 45 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: 15 и $-0,6$. Следовательно, скорость лодки равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

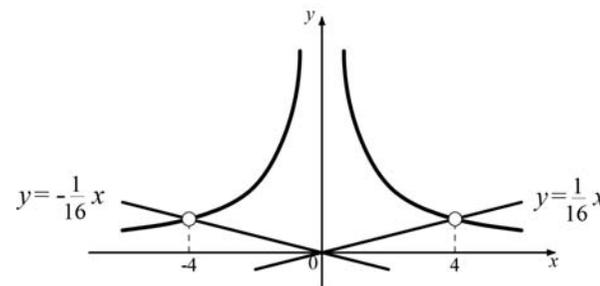
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	3
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Постройте график функции $y = \frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Преобразуем выражение: $\frac{|x|-4}{x^2-4|x|} = \frac{|x|-4}{|x|(|x|-4)} = \frac{1}{|x|}$ при $|x| \neq 4$.

Значит, $y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{если } x \neq \pm 4, \\ \text{не определена} & \text{при } x = -4 \text{ или } x = 4. \end{cases}$

Построим ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и удалим точку $(4; \frac{1}{4})$. Затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $(4; \frac{1}{4})$ или $(-4; \frac{1}{4})$. Этим случаям соответствуют значения $k = 0, k = -\frac{1}{16}$ и $k = \frac{1}{16}$.

Ответ: $0, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения k , при которых прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки	4
График построен правильно, указаны не все верные значения k	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 23** На каждой из двух окружностей с радиусами 3 и 4 лежат по три вершины ромба. Найдите его сторону.

Пусть вершины $A, B,$ и C ромба $ABCD$ лежат на окружности радиуса 3, а вершины $A, B,$ и D лежат на окружности радиуса 4. Примем сторону ромба за x , а величину угла BAC за α . Тогда по теореме синусов для треугольника ABC

$$\frac{x}{\sin \alpha} = 6$$

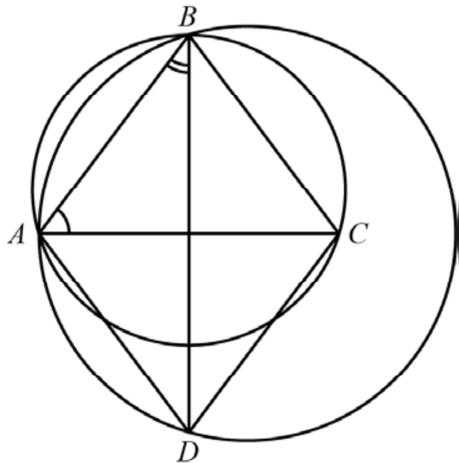
Аналогично по теореме синусов для треугольника ABD :

$$\frac{x}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 8.$$

Значит, $\sin \alpha = \frac{x}{6}$ и $\cos \alpha = \frac{x}{8}$. Получаем уравнение

$$\frac{x^2}{36} + \frac{x^2}{64} = 1.$$

Откуда $x = \pm 4,8$. Следовательно, сторона ромба равна 4,8



Ответ: 4,8.

Критерии оценивания выполнения задания.	Баллы.
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ.	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно; или: решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ.	3.
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0.
<i>Максимальный балл.</i>	4.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

17 Из формулы $L = \frac{m}{q^2}$, в которой все величины положительны, выразите m .

Ответ: $m = q^2L$.

18 Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 8$ и прямой $y = 7x + 10$.

Ответ: $(-2; -4), (9; 73)$.

19 Найдите значение выражения $\frac{(3x)^4 \cdot x^{-15}}{x^{-13} \cdot 4x^7}$ при $x = 3$.

Упростим выражение: $\frac{(3x)^4 \cdot x^{-15}}{x^{-13} \cdot 4x^7} = \frac{3^4}{4} \cdot x^4 \cdot x^{-15} \cdot x^{13} \cdot x^{-7} = \frac{81}{4} x^{4-15+13-7} = \frac{81}{4} x^{-5}$.

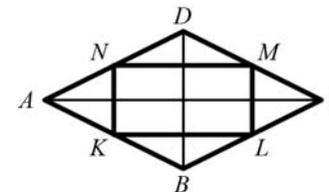
Тогда при $x = 3$ получаем: $\frac{81}{4} \cdot 3^{-5} = \frac{3^4}{4 \cdot 3^5} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Преобразования и подстановка выполнены верно, получен верный ответ.	2
Преобразования выполнены верно, при выполнении подстановки допущена описка или ошибка вычислительного характера. С учетом этого выполнение задания доведено до ответа.	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

20 Середины сторон параллелограмма являются вершинами прямоугольника. Докажите, что данный параллелограмм – ромб.

Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, точки K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. KL – средняя линия треугольника ABC , поэтому отрезок KL параллелен диагонали AC . Аналогично, LM – средняя линия треугольника BCD , поэтому отрезок LM параллелен диагонали BD . По условию $KLMN$ прямоугольник, следовательно, прямые KL и LM перпендикулярны. Но тогда перпендикулярны параллельные им диагонали AC и BD . Значит, $ABCD$ – ромб.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

21 Моторная лодка прошла 48 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 7 часов. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде.

Обозначим неизвестную скорость x (км/ч). Время, потраченное на путь по течению реки равно $\frac{48}{x+2}$ ч. Обратно лодка должна дойти за $\frac{48}{x-2}$ ч. Получаем уравнение

$$\frac{48}{x+2} + \frac{48}{x-2} = 7.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{96x}{(x+2)(x-2)} = 7; \begin{cases} 7x^2 - 96x - 28 = 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $-\frac{2}{7}$ и 14. Отрицательный корень не является решением задачи. Ответ: 14 км/ч.

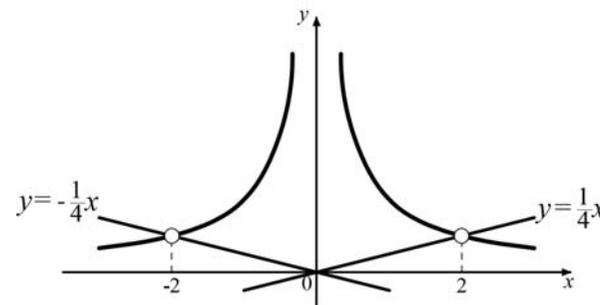
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	3
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Постройте график функции $y = \frac{|x|-2}{x^2-2|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Преобразуем выражение: $\frac{|x|-2}{x^2-2|x|} = \frac{|x|-2}{|x|(|x|-2)} = \frac{1}{|x|}$ при $|x| \neq 2$.

Следовательно, $y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{если } x \neq \pm 2, \\ \text{не определена} & \text{при } x = -2 \text{ или } x = 2. \end{cases}$

Построим график. Для этого построим ветвь гиперболы при $x > 0$ без точки $(2; \frac{1}{2})$ и затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если прямая горизонтальна, либо если она проходит через одну из точек $(2; \frac{1}{2})$ или $(-2; \frac{1}{2})$. Этим трем случаям соответствуют $k = 0$, $k = \frac{1}{4}$ и $k = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения k , при которых прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки	4
График построен правильно, указаны не все верные значения k	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

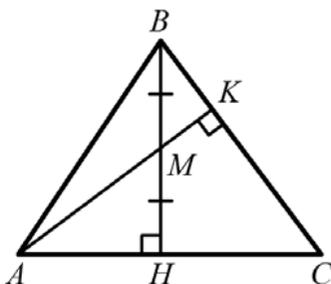
- 23** Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.

Пусть высота BH треугольника ABC разбивает основание AC на отрезки $AH = 8$ и $CH = 9$, высота AK пересекает высоту BH в точке M , причем $BM = MH = x$.

Треугольники AHM , BKM и BHC подобны, поскольку они прямоугольные и первые два имеют равные углы (углы AMH и BMK равны как вертикальные), а вторые два имеют общий угол. Получаем пропорцию

$$\frac{MH}{AH} = \frac{CH}{BH}, \text{ то есть } \frac{x}{8} = \frac{9}{2x}, \text{ откуда } x^2 = 36.$$

Следовательно, $BM = 6$, и $BH = 12$.



Ответ: 12.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно; или: решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	132
2	32
3	22
4	4
5	3
6	7
7	997
8	35

№ задания	Ответ
9	-4
10	3
11	4
12	2
13	300
14	80
15	24
16	231

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	312
2	12
3	78
4	4
5	4
6	8
7	1002
8	65

№ задания	Ответ
9	1
10	5
11	2
12	3
13	200
14	20
15	23
16	432