Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin x+\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\sin x+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0;\quad \sin x+\cos x=0.$$

Если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что $\sin x=0$, что невозможно. Значит, $\cos x\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg}x+1=0;\qquad \operatorname{tg}x=-1.$$

Решения: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in Z$.

б) Составим неравенство: $\pi<-\frac{\pi}{4}+\pi k<\frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4}<k<2\frac{3}{4}$.

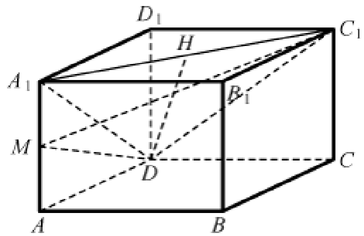
Следовательно, $k=2$. На данном отрезке получаем один корень

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in Z$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.



Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду MDA_1C_1. Ее объем можно выразить двумя способами:

1) $V=\frac{1}{3}S_{MA_1D}\cdot C_1D_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{6}$.

2) $V=\frac{1}{3}S_{DA_1C_1}\cdot\rho$,

где ρ искомое расстояние. Приравняем выражения для объемов и выразим расстояние:

$$\rho=\frac{1}{2S_{DA_1C_1}}.$$

Найдем площадь равнобедренного треугольника DA_1C_1. Проведем в нем высоту DH. Она равна

$$DH=\sqrt{DA_1^2-A_1H^2}=\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2-1^2}=\sqrt{2}.$$

Тогда

$$S_{DA_1C_1}=\frac{1}{2}A_1C_1\cdot DH=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\rho=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\rho=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} 9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\geq 6, \\ \log_2^2 x+6>5\log_2 x. \end{cases}$$

Решение. Решения обоих неравенств ищем при условии $x>0$. Так как при этом условии

$$9^{\lg x}=x^{2\lg 3},$$

решая первое неравенство, получаем

$$9^{\lg x}\geq 3;\quad \lg x\geq \frac{1}{2};\quad x\geq\sqrt{10}.$$

Решая второе неравенство, получаем:

$$\log_2^2 x-5\log_2 x+6>0;\quad \left[\begin{array}{l}\log_2 x>3,\\ \log_2 x<2;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x>8,\\ 0<x<4.\end{array}\right.$$

Решение системы является общей частью решений двух неравенств. Так как $\sqrt{10}<4$, получаем:

$$\sqrt{10}\leq x<4 \text{ или } x>8.$$

Ответ: $\sqrt{10}\leq x<4$, $x>8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но в решении системы допущена ошибка	2
Только одно из неравенств системы решено верно или получены решения обоих неравенств, неверные из-за арифметических ошибок	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB=16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть CH – высота треугольника, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, Q – центр этой окружности. Так как $AH=8$, то $AC=10$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p=18$, а его площадь $S=48$. Поэтому $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{8}{3}$. Обозначим $\angle QAH$ буквой α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{QH}{AH}=\dfrac{1}{3}$, а $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Отсюда $AQ=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{8}{3}\sqrt{10}$.

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 3.

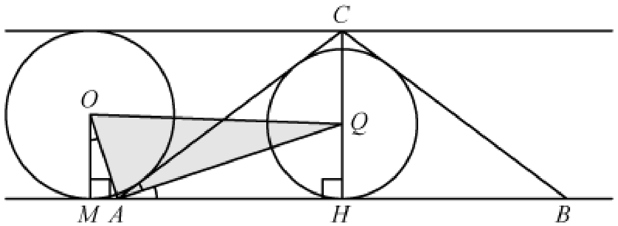


Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO – биссектриса угла MAC. Тогда

$$\angle OAQ=\frac{1}{2}\left(\angle CAB+\angle CAM\right)=90^\circ,$$

$$\angle OAM=90^\circ-\angle QAH=90^\circ-\alpha,\quad \angle AOM=\alpha,$$

$$AO=\frac{OM}{\cos\alpha}=\sqrt{10}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ = \sqrt{AQ^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{640}{9} + 10} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 2).

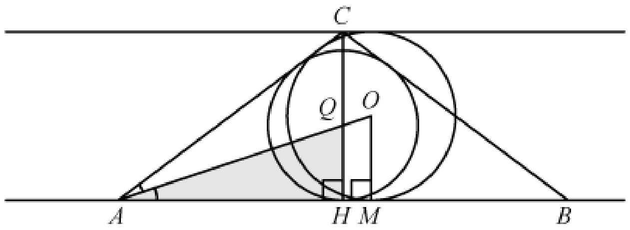


Рис. 2.

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = 3 : \frac{8}{3} = \frac{9}{8}$, поэтому

$$AO = \frac{9}{8} AQ = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{10} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\cos x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 1;$$

$$\cos x = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2};$$

$$\cos x = -\sin x.$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, что невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = -1.$$

Решения: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

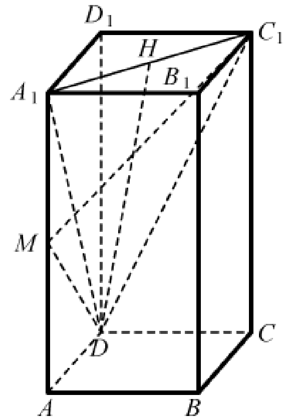
б) Составим неравенство: $\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi k < 2\pi$, откуда $\frac{3}{4} < k < 2\frac{1}{4}$.

Следовательно, $k = 1$ или $k = 2$. На данном отрезке получаем два корня $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.б) $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 2. M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.



Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду MDA_1C_1. Ее объем можно выразить двумя способами:

1) $V = \frac{1}{3}S_{MA_1D}\cdot C_1D_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$.

2) $V = \frac{1}{3}S_{DA_1C_1}\cdot\rho$,

где ρ искомое расстояние. Приравняем выражения для объемов и выразим расстояние:

$$\rho = \frac{1}{2S_{DA_1C_1}}.$$

Найдем площадь равнобедренного треугольника DA_1C_1. Проведем в нем высоту DH. Она равна

$$DH = \sqrt{DA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$S_{DA_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1\cdot DH = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} 9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \le \dfrac{2}{3}, \\ \log_2^2 x + 5\log_2 x + 6 > 0. \end{cases}$$

Решение. Решения обоих неравенств ищем при условии $x > 0$. Так как при этом условии

$$9^{\lg x} = x^{2\lg 3},$$

решая первое неравенство, получаем

$$9^{\lg x} \le 3^{-1};\quad \lg x \le -\frac{1}{2};\quad 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{10}}\ .$$

Решая второе неравенство, получаем:

$$\log_2^2 x + 5\log_2 x + 6 > 0;\quad \left[\begin{array}{l} \log_2 x < -3, \\ \log_2 x > -2. \end{array}\right.$$

Значит, $0 < x < \dfrac{1}{8}$ или $x > \dfrac{1}{4}$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{10}} > \dfrac{1}{4}$, получаем: $0 < x < \dfrac{1}{8}$ или $\dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $0 < x < \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но в решении системы допущена ошибка	2
Только одно из неравенств системы решено верно или получены решения обоих неравенств, неверные из-за арифметических ошибок	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть CH – высота треугольника, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, Q – центр этой окружности. $AH = 5$, поэтому $AC = 13$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p = 18$, а его площадь $S = 60$. Поэтому $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{10}{3}$. Обозначим $\angle QAH$ буквой α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{QH}{AH} = \dfrac{2}{3}$, а $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. Отсюда $AQ = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{3}\sqrt{13}$.

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 6.

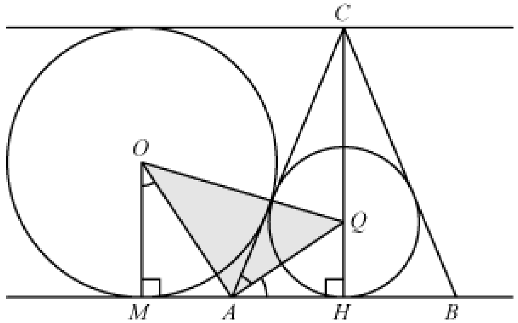


Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO – биссектриса угла MAC. Тогда

$$\angle OAQ = \frac{1}{2}\left(\angle CAB + \angle CAM\right) = 90^\circ,$$

$$\angle OAM = 90^\circ - \angle QAH = 90^\circ - \alpha,\quad \angle AOM = \alpha,$$

$$AO = \frac{OM}{\cos\alpha} = 2\sqrt{13}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ = \sqrt{AQ^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{325}{9} + 52} = \frac{\sqrt{793}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 2).

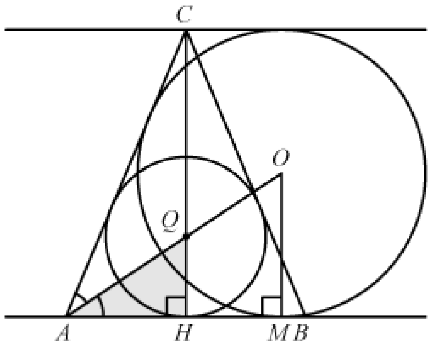


Рис. 2.

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = 6 : \frac{10}{3} = \frac{9}{5}$, поэтому

$$AO = \frac{9}{5} AQ = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{3}\sqrt{13} = 3\sqrt{13}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{13} - \frac{5}{3}\sqrt{13} = \frac{4}{3}\sqrt{13}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4}{3}\sqrt{13}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3