Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\sin x + \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0; \quad \sin x + \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, что невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0; \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

Решения: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

б) Составим неравенство: $\pi < -\frac{\pi}{4} + \pi k < \frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4} < k < 2\frac{3}{4}$.

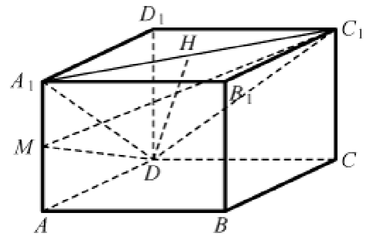
Следовательно, $k = 2$. На данном отрезке получаем один корень

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку , не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.



Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду MDA_1C_1. Ее объем можно выразить двумя способами:

1) $V = \frac{1}{3}S_{MA_1D} \cdot C_1D_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{6}$.

2) $V = \frac{1}{3}S_{DA_1C_1} \cdot \rho$,

где ρ искомое расстояние. Приравняем выражения для объемов и выразим расстояние:

$$\rho = \frac{1}{2S_{DA_1C_1}}.$$

Найдем площадь равнобедренного треугольника DA_1C_1. Проведем в нем высоту DH. Она равна

$$DH = \sqrt{DA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2 - 1^2} = \sqrt{2}.$$

Тогда

$$S_{DA_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot DH = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\rho = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{6}{x-3}\ge 0, \\ \sqrt{x^2+34}\ge 6. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство

$$\frac{x^2-5x+6+2x^2-8x+6-6x^2+18x-12}{(x-1)(x-2)(x-3)}\ge 0;$$

$$\frac{3x^2-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\le 0.$$

Получаем: $x\le 0,\ 1<x\le\frac{5}{3}$ или $2<x<3$.

2. Решим второе неравенство: $x^2+34\ge 36$; $x^2\ge 2$. Значит, $x\le-\sqrt{2}$ или $x\ge\sqrt{2}$.

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Поскольку $1<\sqrt{2}<\frac{5}{3}$, получаем:

$$x\le-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\le x\le\frac{5}{3} \text{ или } 2<x<3.$$

Ответ: $x\le-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\le x\le\frac{5}{3}$ или $2<x<3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но в решении системы допущена ошибка	2
Только одно из неравенств системы решено верно или получены решения обоих неравенств, неверные из-за арифметических ошибок	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB=16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а

вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть CH – высота треугольника, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, Q – центр этой окружности. Так как $AH=8$, то $AC=10$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p=18$, а его площадь $S=48$. Поэтому $r=\frac{S}{p}=\frac{8}{3}$. Обозначим $\angle QAH$ буквой α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{QH}{AH}=\frac{1}{3}$, а $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Отсюда $AQ=\frac{AH}{\cos\alpha}=\frac{8}{3}\sqrt{10}$.

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 3.

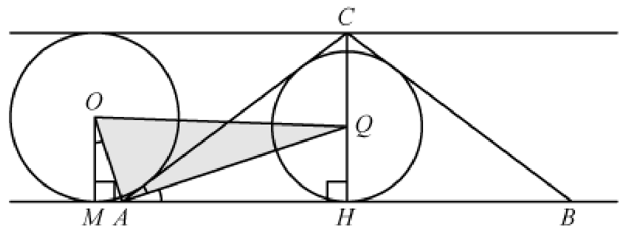


Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO – биссектриса угла MAC. Тогда

$$\angle OAQ=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CAM)=90°,$$

$$\angle OAM=90°-\angle QAH=90°-\alpha,\quad \angle AOM=\alpha,$$

$$AO=\frac{OM}{\cos\alpha}=\sqrt{10}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ=\sqrt{AQ^2+AO^2}=\sqrt{\frac{640}{9}+10}=\frac{\sqrt{730}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 2).

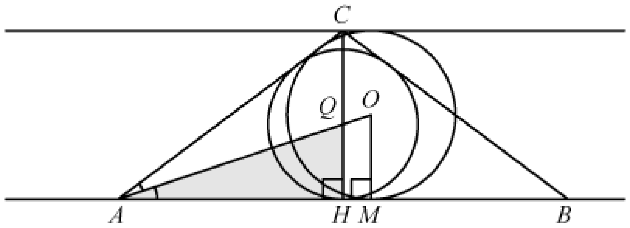


Рис. 2.

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = 3 : \frac{8}{3} = \frac{9}{8}$, поэтому

$$AO = \frac{9}{8} AQ = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{10} - \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\cos x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 1;$$

$$\cos x = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2};$$

$$\cos x = -\sin x.$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, что невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = -1.$$

Решения: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

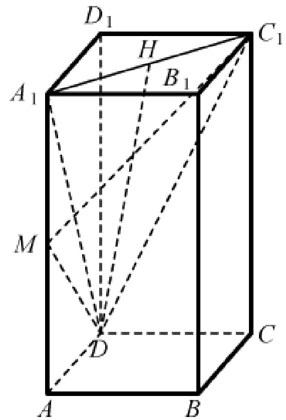
б) Составим неравенство: $\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi k < 2\pi$, откуда $\frac{3}{4} < k < 2\frac{1}{4}$.

Следовательно, $k = 1$ или $k = 2$. На данном отрезке получаем два корня $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$. б) $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 2. M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.



Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду MDA_1C_1. Ее объем можно выразить двумя способами:

1) $V = \frac{1}{3}S_{MA_1D} \cdot C_1D_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$.

2) $V = \frac{1}{3}S_{DA_1C_1} \cdot \rho$,

где ρ искомое расстояние. Приравняем выражения для объемов и выразим расстояние:

$$\rho = \frac{1}{2S_{DA_1C_1}}.$$

Найдем площадь равнобедренного треугольника DA_1C_1. Проведем в нем высоту DH. Она равна

$$DH = \sqrt{DA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$S_{DA_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot DH = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}\ge\dfrac{6}{x+3}, \\ \sqrt{x^2+22}\le 5. \end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство:

$$\frac{x^2+5x+6+2x^2+8x+6-6x^2-18x-12}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ge 0;$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\le 0.$$

Получаем: $x<-3,\ -2<x\le-\dfrac{5}{3}$ или $-1<x\le 0$.

2. Решим второе неравенство: $0<x^2+22\le 25$; $x^2\le 3$. Значит, $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$.

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Поскольку $-2<-\sqrt{3}<-\dfrac{5}{3}$, получаем:

$$-\sqrt{3}<x\le-\frac{5}{3} \text{ или } -1<x\le 0.$$

Ответ: $-\sqrt{3}<x\le-\dfrac{5}{3}$ или $-1<x\le 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но в решении системы допущена ошибка	2
Только одно из неравенств системы решено верно или получены решения обоих неравенств, неверные из-за арифметических ошибок	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB=10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а

вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть CH – высота треугольника, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, Q – центр этой окружности. $AH=5$, поэтому $AC=13$. Следовательно, полупериметр треугольника ABC равен $p=18$, а его площадь $S=60$. Поэтому $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{10}{3}$. Обозначим $\angle QAH$ буквой α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{QH}{AH}=\dfrac{2}{3}$, а $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. Отсюда $AQ=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{5}{3}\sqrt{13}$.

Пусть окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и не имеет общих точек с боковой стороной BC (рис. 1). Нетрудно понять, что радиус этой окружности равен 6.

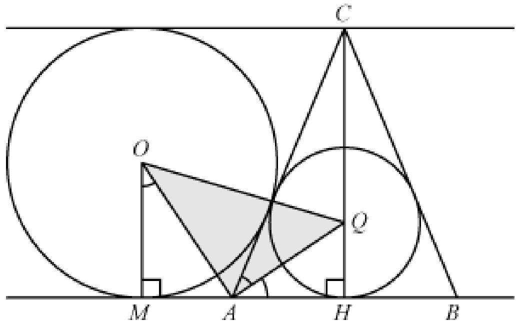


Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO – биссектриса угла MAC. Тогда

$$\angle OAQ=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CAM)=90^\circ,$$

$$\angle OAM=90^\circ-\angle QAH=90^\circ-\alpha,\quad \angle AOM=\alpha,$$

$$AO=\frac{OM}{\cos\alpha}=2\sqrt{13}.$$

Из прямоугольного треугольника OAQ находим, что

$$OQ=\sqrt{AQ^2+AO^2}=\sqrt{\frac{325}{9}+52}=\frac{\sqrt{793}}{3}.$$

Пусть теперь окружность с центром O касается данных параллельных прямых и боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC, причем прямой AB – в точке M, и пересекает боковую сторону BC (рис. 2).

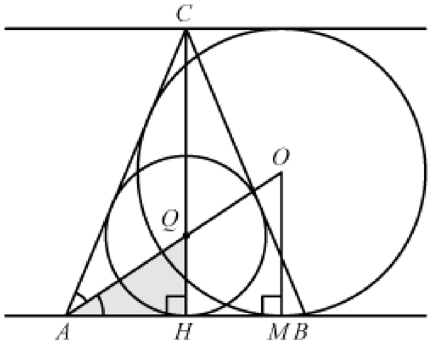


Рис. 2.

Тогда точки O и Q лежат на биссектрисе угла BAC. Треугольник AOM подобен треугольнику AQH с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = 6 : \frac{10}{3} = \frac{9}{5}$, поэтому

$$AO = \frac{9}{5} AQ = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{3} \sqrt{13} = 3\sqrt{13}.$$

Следовательно,

$$OQ = AO - AQ = 3\sqrt{13} - \frac{5}{3}\sqrt{13} = \frac{4}{3}\sqrt{13}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4}{3}\sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3