

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом:

19 Решите уравнение $x^3 = 4x^2 + 5x$.

Решение. Перенесем все члены в левую часть и вынесем x за скобки:

$$x(x^2 - 4x - 5) = 0, \text{ откуда } x = 0 \text{ или } x^2 - 4x - 5 = 0$$

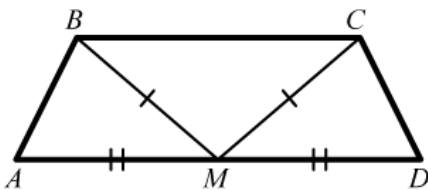
Решая квадратное уравнение, находим: $x = -1$ или $x = 5$.

Ответ: $-1; 0; 5$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

20 Середина M основания AD трапеции $ABCD$ равноудалена от концов другого основания. Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

Доказательство. Треугольник BMC равнобедренный. Поэтому $\angle CBM = \angle BCM$. По свойству параллельных прямых $\angle CBM = \angle BMA$ и $\angle BCM = \angle CMD$. Следовательно, $\angle BMA = \angle CMD$. Значит, треугольники BMA и CMD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AB = CD$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	2
Доказательство в целом верное, но не обосновано равенство треугольников	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

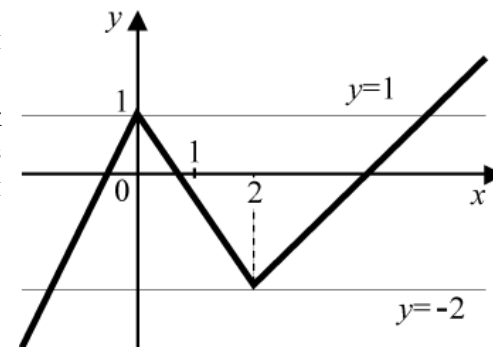
21 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x < 0, \\ -1,5x+1, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ x-4, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. График функции состоит из двух лучей и отрезка.

На рисунке видно, что график имеет ровно две общие точки с горизонтальными прямыми $y = -2$ и $y = 1$.



Ответ: $1; -2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки	3
График построен правильно, но указаны значения c не указаны, указаны неверно или не все.	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Пристани A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 4 км/ч. Лодка проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 6 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Решение. Пусть x км/ч – собственная скорость лодки. Тогда скорость движения по течению равна $x + 4$ км/ч, а скорость движения против течения равна $x - 4$ км/ч. Обозначим S расстояние между пристанями. Время, затраченное на весь путь, равно

$$\frac{S}{x+4} + \frac{S}{x-4}.$$

По условию средняя скорость равна 6 км/ч, а весь путь равен $2S$. Следовательно,

$$\left(\frac{S}{x+4} + \frac{S}{x-4} \right) \cdot 6 = 2S.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{3}; \quad \frac{2x}{x^2-16} = \frac{1}{3}; \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 16 = 0, \\ x^2 - 16 \neq 0. \end{cases}$$

Получаем: $x = 8$ или $x = -2$. Корень -2 не является решением задачи. Значит, скорость лодки равна 8 км/ч.

Ответ: 8 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	4
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

23 Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AM : MB = 16 : 9$.

Решение. Пусть $BC = y$ см, $AM = 16x$ см и $MB = 9x$ см.

Поэтому гипотенуза $AB = 25x$ см.

По теореме Пифагора: $y^2 = 625x^2 - 64$.

По теореме о секущей и касательной

$$y^2 = 25x \cdot 9x = 225x^2.$$

Следовательно, $225x^2 = 625x^2 - 64$, откуда

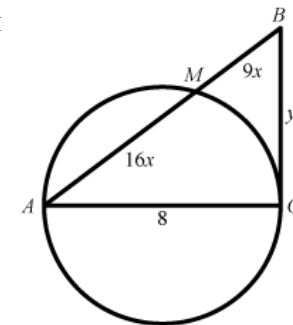
$$x^2 = \frac{4}{25}.$$

Тогда $y^2 = 225 \cdot \frac{4}{25}$; $y = \frac{15 \cdot 2}{5} = 6$.

Следовательно, площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$

Ответ: 24 см^2 .



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой, возможно, получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение $x^3 = 6x^2 + 7x$.

Решение. Перенесем все члены в левую часть и вынесем x за скобки:

$$x(x^2 - 6x - 7) = 0, \text{ откуда } x = 0 \text{ или } x^2 - 6x - 7 = 0.$$

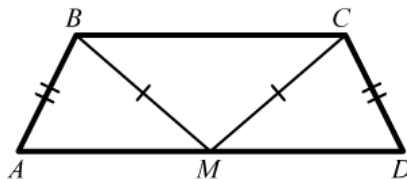
Решая квадратное уравнение, находим: $x = -1$ или $x = 7$.

Ответ: $-1; 0; 7$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

20 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Точка M лежит на основании AD и равноудалена от концов другого основания. Докажите, что M середина основания AD .

Доказательство. Треугольник BMC равнобедренный. Поэтому $\angle CBM = \angle BCM$. В равнобедренной трапеции $\angle ABC = \angle DCB$. Отсюда следует, что $\angle ABM = \angle DCM$. Значит, треугольники BMA и CMD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AM = MD$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	2
Доказательство в целом верное, но не обосновано равенство треугольников	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

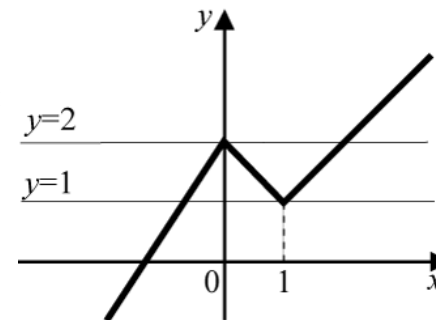
21 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 1,5x + 2, & \text{если } x < 0, \\ 2 - x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. График функции состоит из двух лучей и отрезка. На рисунке видно, что график имеет ровно две общие точки с горизонтальными прямыми $y = 1$ и $y = 2$.

Ответ: $2; 1$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки	3
График построен правильно, но значения c не указаны, указаны неверно или не все.	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Пристань A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 3 км/ч. Лодка проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 8 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Решение. Пусть x км/ч – собственная скорость лодки. Тогда скорость движения по течению равна $x+3$ км/ч, а скорость движения против течения равна $x-3$ км/ч. Обозначим S расстояние между пристанями.

Время, затраченное на весь путь, равно

$$\frac{S}{x+3} + \frac{S}{x-3}.$$

По условию средняя скорость равна 8 км/ч, а весь путь равен $2S$. Следовательно,

$$\left(\frac{S}{x+3} + \frac{S}{x-3}\right) \cdot 8 = 2S.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4}; \quad \frac{2x}{x^2-9} = \frac{1}{4}; \quad \begin{cases} x^2 - 8x - 9 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Получаем: $x=9$ или $x=-1$. Корень -1 не является решением задачи. Значит, скорость лодки равна 9 км/ч.

Ответ: 9 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	4
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

23 Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 3 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AM:MB=9:16$.

Решение. Пусть $BC = y$ см, $AM = 9x$ см и $MB = 16x$ см.

Поэтому гипотенуза $AB = 25x$ см.

По теореме Пифагора: $y^2 = 625x^2 - 9$.

По теореме о секущей и касательной

$$y^2 = 25x \cdot 16x = 400x^2.$$

Следовательно, $400x^2 = 625x^2 - 9$, откуда

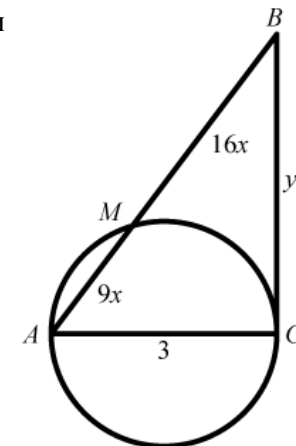
$$x^2 = \frac{1}{25}.$$

Тогда $y^2 = 400 \cdot \frac{1}{25}$; $y = \frac{20}{5} = 4$.

Следовательно, площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6 см^2 .



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой, возможно, получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4