

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Решение.

Сделаем замену $y = x^2$. Получаем уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$.

Корни: $y = 1, y = 4$.

Если $y = 1$, то $x = -1$ или $x = 1$.

Если $y = 4$, то $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -2, -1, 1, 2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

20 Докажите, что биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника равны.

Доказательство:

$$\triangle ABC; AB = CB \quad \angle ACK = \angle KCB = \angle MAC = \angle BAM$$

Докажем, что $AM = CK$.

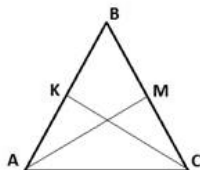
1) $\triangle ACK = \triangle CAM$ по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) AC – общая;

б) $\angle KAC = \angle MCA$ по свойству углов равнобедренного треугольника;

в) $\angle ACK = \angle MAC$ по определению биссектрисы и равенству углов при основании равнобедренного треугольника.

2) $KC = MA$ как соответствующие элементы равных треугольников.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

21 Разложите на множители $2x^2 - 5xy - 3y^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5xy - 3y^2 &= 2x^2 - 6xy + xy - 3y^2 = \\ &= 2x(x - 3y) + y(x - 3y) = (x - 3y)(2x + y). \end{aligned}$$

Ответ: $(x - 3y)(2x + y)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Преобразования выполнены верно, получен верный ответ	3
Решение доведено до конца, но на последнем шаге допущена вычислительная ошибка или описка	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Из пяти следующих утверждений о результатах матча хоккейных команд “Транспортир” и “Линейка” четыре истинны, а одно – ложно. Определите, с каким счетом закончился матч, и укажите победителя (если матч завершился победой одной из команд). Ответ обоснуйте.

- 1) Выиграл “Транспортир”.
- 2) Всего в матче было заброшено менее 10 шайб.
- 3) Матч закончился вничью.
- 4) Всего в матче было заброшено более 8 шайб.
- 5) “Линейка” забросила более 3 шайб.

Решение.

Предположим, что утверждение (3) истинно. Тогда утверждение (1) ложно. В этом случае утверждения (2) и (4) истинны. Из них следует, что было заброшено 9 шайб. Число 9 нечетно, поэтому матч не мог завершиться вничью. Следовательно, утверждение (3) ложно. Противоречие.

Значит, утверждение (3) ложно. Остальные утверждения истинны, значит было заброшено 9 шайб, причем выиграл «Транспортир».

Из утверждения (5) следует, что наименьшее число шайб, заброшенных командой «Линейка» равно 4. Больше 4 шайб «Линейка» забросить не могла, потому что тогда бы она выиграла. Следовательно, «Линейка» забросила ровно 4 шайбы, а «Транспортир» – 5 шайб.

Ответ: 5:4 в пользу «Транспортира».

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Преобразования выполнены верно, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

23 Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 12$ см, $BC = 24$ см.

Решение:

1) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по двум углам:

а) $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные;

б) $\angle CBO = \angle ADO$ как внутренние накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей BD .

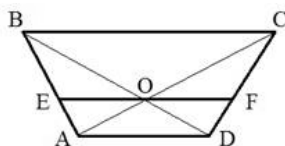
$$\frac{BO}{DO} = \frac{CO}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{24}{12} = 2$$

$$BO = 2DO; CO = 2AO;$$

2) $\triangle EBO \sim \triangle ABD$ по двум углам:

а) $\angle B$ – общий;

б) $\angle BEO = \angle BAD$ как соответственные при $EO \parallel AD$ и секущей AB .



$$\frac{EO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{BO}{BO + DO} = \frac{2DO}{2DO + DO} = \frac{2DO}{3DO} = \frac{2}{3};$$

$$EO = \frac{2}{3}AD = 8 \text{ см};$$

3) $EO = FO$;

4) $EF = 16$ см.

Ответ: 16 см.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги выполнены обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно или решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Найдите значение выражения $\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^5}$ при $x=5$.

Решение.

$$\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^5} = \frac{27}{2} x^{3-9+10-5} = \frac{27}{2} x^{-1} = \frac{27}{2x}$$

При $x = 5$ получаем: $\frac{27}{2x} = \frac{27}{10} = 2,7$.

Ответ: 2,7.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

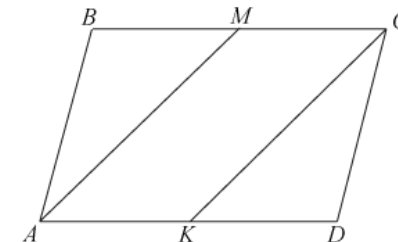
20 В параллелограмме проведены биссектрисы противоположных углов. Докажите, что отрезки биссектрис, заключенные внутри параллелограмма, равны.

Доказательство:

$ABCD$ – параллелограмм

AM – биссектриса $\angle A$, CK – биссектриса $\angle C$.

Докажем, что $AM=CK$.



1) $\triangle AMB = \triangle CKD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) $AB=CD$ – по свойству противоположных сторон параллелограмма;

б) $\angle ABM = \angle KDC$ по свойству противоположных углов параллелограмма;

в) $\angle BAM = \angle KCD$ по определению биссектрисы и равенству противоположных углов параллелограмма.

2) $KC=MA$ как соответствующие элементы равных треугольников.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

21 Первая прямая проходит через точки $(0;4,5)$ и $(3;6)$. Вторая прямая проходит через точки $(1;2)$ и $(-4;7)$. Найдите координаты общей точки этих двух прямых.

Решение.

Уравнение прямой $y = kx + b$. Подставляя координаты первой пары точек, получаем систему:

$$\begin{cases} 4,5 = k \cdot 0 + b, \\ 6 = k \cdot 3 + b; \end{cases} \begin{cases} b = 4,5, \\ 3k = 1,5; \end{cases} \begin{cases} b = 4,5, \\ k = 0,5. \end{cases}$$

Значит, уравнение первой прямой $y = 0,5x + 4,5$.

Аналогично найдем уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2 = k \cdot 1 + b, \\ 7 = k \cdot (-4) + b; \end{cases} \begin{cases} k + b = 2, \\ -4k + b = 7; \end{cases} \begin{cases} 5k = -5, \\ k + b = 2; \end{cases} \begin{cases} k = -1, \\ b = 3. \end{cases}$$

Уравнение второй прямой $y = 3 - x$.

Чтобы найти координаты общей точки, решим систему:

$$\begin{cases} y = 0, 5x + 4, 5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \begin{cases} 3 - x = 0, 5x + 4, 5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \begin{cases} -1, 5x = 1, 5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 4. \end{cases}$$

Замечание. Уравнения прямых можно найти разными способами. Кроме того, задачу можно решать графически, построив нужные прямые и указав координаты их общей точки.

Ответ: $(-1;4)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы получен верный ответ	3
Решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Смешав 60%-ый и 30%-ый растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 20%-ый раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 60%-го раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть x кг и y кг – массы первого и второго растворов, взятые при смешивании. Тогда $x+y+5$ кг – масса полученного раствора, содержащего $0,6x+0,3y$ кг кислоты. Концентрация кислоты в полученном растворе 20 %, откуда

$$0,6x+0,3y+0,2(x+y+5).$$

Составим аналогичное уравнение, приняв условие, что вместо воды использовался третий раствор:

$$0,6x+0,3y+0,9 \cdot 5=0,7(x+y+5).$$

Решим систему двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 0, 6x + 0, 3y = 0, 2(x + y + 5), \\ 0, 6x + 0, 3y + 0, 9 \cdot 5 = 0, 7(x + y + 5); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0, 4x + 0, 1y = 1, \\ 0, 1x + 0, 4y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Замечание. Решение можно сделать несколько проще, если заметить, что из полученных уравнений следует: $4, 5 = 0, 5(x + y + 5)$, откуда $x + y = 4$.

Первое уравнение принимает вид $0, 3x + 1, 2 = 1, 8$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2 кг.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно или решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

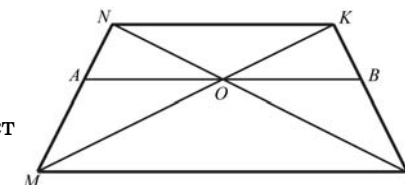
23 Прямая, параллельная основаниям MP и NK трапеции $MNKP$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB , если $MP = 40$ см, $NK = 24$ см.

Решение:

1) $\triangle MOP \sim \triangle KON$ по двум углам:

а) $\angle NOK = \angle MOP$ как вертикальные;

б) $\angle PMO = \angle NKO$ как внутренние накрест лежащие углы при $NK \parallel MP$ и секущей MK .



$$\frac{NO}{PO} = \frac{KO}{MO} = \frac{NK}{MP} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

$$KO = \frac{3}{5}MO; NO = \frac{3}{5}PO$$

2) $\triangle AMO \sim \triangle NMK$ по двум углам:

а) $\angle M$ - общий;

б) $\angle MAO = \angle MNK$ как соответственные при $AO \parallel NK$ и секущей MN .

$$\frac{AO}{NK} = \frac{MO}{MK} = \frac{MO}{MO + KO} = \frac{MO}{MO + \frac{3}{5}MO} = \frac{5MO}{8MO} = \frac{5}{8}.$$

$$AO = \frac{5}{8}NK = 15 \text{ см.}$$

3) Аналогично $BO = \frac{3}{5}NK = 15 \text{ см.}$

4) $AB = 30 \text{ см.}$

Ответ: 30 см.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги выполнены обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно или решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение $x^3 = x^2 - 7x + 7$.

Решение.

Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители:

$$x^3 - x^2 + 7x - 7 = 0; \quad x^2(x - 1) + 7(x - 1) = 0; \quad (x - 1)(x^2 + 7) = 0.$$

$x^2 + 7 > 0$ при всех значениях x , поэтому $x - 1 = 0$. Значит, $x = 1$.

Ответ: 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

20 Докажите, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны.

Доказательство:

Пусть в треугольнике ABC $AB = CB$, K и M середины сторон AB и BC соответственно.

Докажем, что $AM = CK$.

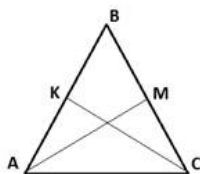
1) $\triangle ACK = \triangle CAM$ по 2 сторонам и углу между ними:

а) AC – общая сторона,

б) $\angle KAC = \angle MCA$ по свойству равнобедренного треугольника,

в) $AK = CM$, поскольку K и M середины равных сторон.

2) $AM = CK$ как соответственные стороны равных треугольников.



Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

21 Брюки дороже рубашки на 20%, а пиджак дороже рубашки на 44%. На сколько процентов пиджак дороже брюк?

Решение.

Если цена рубашки равна a , то брюки стоят $1,2a$, а пиджак стоит $1,44a$. Следовательно, пиджак дороже брюк в $\frac{1,44}{1,2} = 1,2$ раза. Поэтому пиджак стоит на 20 % дороже брюк.

Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	3
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно или решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

22 Сократите дробь $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p(b) = (b + \frac{3}{b})(3b + \frac{1}{b})$.

Решение.

$$\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})} = \frac{(b + \frac{3}{b})(3b + \frac{1}{b})}{(\frac{1}{b} + 3b)(\frac{3}{b} + b)} = 1.$$

Ответ: 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, но допущена одна ошибка при подстановке, с её учётом все дальнейшие шаги выполнены верно	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

23 Прямая, параллельная основаниям AD и BC трапеции $ABCD$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает ее боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 10$ см, $BC = 15$ см.

Решение:

1) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по двум углам:

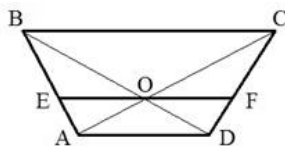
а) $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные;

б) $\angle CBO = \angle ADO$ как внутренние накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей BD .

$$\frac{BO}{DO} = \frac{CO}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{10} = 1,5$$

$$BO = 1,5DO; CO = 1,5AO;$$

2) $\triangle EBO \sim \triangle ABD$ по двум углам:



а) $\angle B$ – общий;

б) $\angle BEO = \angle BAD$ как соответственные углы при $EO \parallel AD$ и секущей AB .

$$\frac{EO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{BO}{BO + DO} = \frac{1,5DO}{1,5DO + DO} = \frac{1,5DO}{2,5DO} = \frac{3}{5},$$

$$EO = \frac{3}{5}AD = 6 \text{ см};$$

3) $EO = FO$;

4) $EF = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно или решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19) Решите уравнение $(2x - 3)^2 = (1 - 2x)^2$.

Решение.

Перенесем все члены влево и применим формулу разности квадратов:

$$(2x - 3)^2 - (1 - 2x)^2 = 0; \quad -2(4x - 4) = 0; \quad x = 1.$$

Другой способ. Раскроем скобки, пользуясь формулой квадрата разности:

$$4x^2 - 12x + 9 = 1 - 4x + 4x^2; \quad 8x = 8; \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Уравнение решено верно, получен верный ответ	2
Решение уравнения доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	2

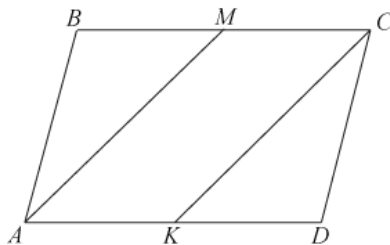
20) Из противоположных углов параллелограмма проведены отрезки к серединам противоположащих сторон. Докажите, что эти отрезки равны.

Доказательство.

$ABCD$ – параллелограмм,

M – середина BC , K – середина AD .

Докажем, что $AM = CK$.



1) $\triangle ABM = \triangle CKD$ по двум сторонам и углу между ними:

- а) $AB = CD$ – по свойству противоположных сторон параллелограмма;
 б) $BM = KD$ по свойству противоположных сторон параллелограмма и определению середины отрезка;
 в) $\angle ABM = \angle KDC$ по свойству противоположных углов параллелограмма;

2) $KC = MA$ как соответствующие стороны равных треугольников.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

21) Железнодорожный состав длиной в 1 км прошёл бы мимо столба за 1 мин., а через туннель (от входа локомотива до выхода последнего вагона) при той же скорости — за 3 мин. Какова длина туннеля (в км)?

Решение.

Поезд проходит через туннель за 3 минуты, при этом за одну минуту поезд проходит мимо выхода из туннеля, следовательно, от входа локомотива в туннель до выхода проходит 2 минуты. Мимо столба поезд длиной 1 км проходит за 1 минуту, поэтому его скорость равна 1 км/мин. Значит, за 2 минуты поезд пройдет 2 км, поэтому длина туннеля равна 2 км.

Ответ: 2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	3
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	3

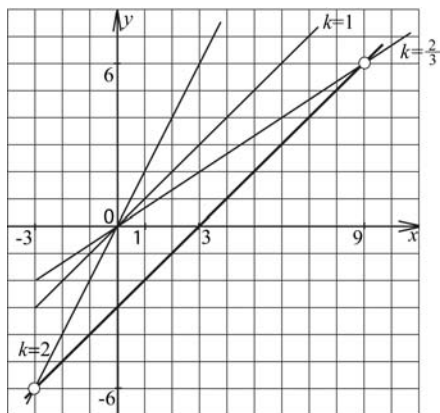
22) Постройте график функции $y = \frac{(x-9)(x^2-9)}{x^2-6x-27}$ и определите, при каких значениях k построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$.

Решение.

Преобразуем функцию: $y = \frac{(x-9)(x-3)(x+3)}{(x-9)(x+3)} = x-3$ при $x \neq -3$ и $x \neq 9$.

График – прямая $y = x - 3$ без двух точек $(-3; -6)$ и $(9; 6)$. Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенной прямой общих точек, если она будет ей параллельна, т.е. при $k = 1$, и если она будет проходить через выколотые точки.

Через первую из этих точек прямая $y = kx$ проходит, если $k = 2$, а через вторую – если $k = \frac{2}{3}$.



Ответ: $\frac{2}{3}$; 1; 2.

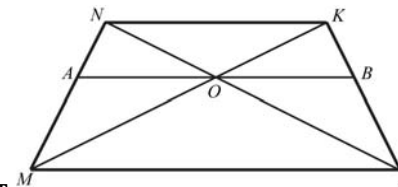
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, но потеряна одна из точек	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

23 Прямая, параллельная основаниям MP и NK трапеции $MNKP$, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB , если $MP = 24$ см, $NK = 16$ см.

Решение:

$AB \parallel MP$, $MP = 24$ см, $NK = 16$ см, $AB = ?$

- 1) $\triangle MOP \sim \triangle NOK$ по двум углам:
 а) $\angle NOK = \angle MOP$ как вертикальные;
 б) $\angle POM = \angle NKO$ как внутренние накрест лежащие углы при $NK \parallel MP$ и секущей BD .



$$\frac{NO}{PO} = \frac{KO}{MO} = \frac{NK}{MP} = \frac{16}{24}$$

$$KO = \frac{2}{3}MO; NO = \frac{2}{3}PO$$

- 2) $\triangle AMO \sim \triangle NMO$ по двум углам:

а) $\angle M$ - общий;

б) $\angle MAO = \angle MNK$ как соответственные при $AO \parallel NK$ и секущей MN .

$$\frac{AO}{NK} = \frac{MO}{MK} = \frac{MO}{MO + KO} = \frac{MO}{MO + \frac{2}{3}MO} = \frac{3MO}{5MO} = \frac{3}{5}$$

$$AO = \frac{3}{5}NK = 9,6 \text{ см.}$$

3) аналогичн $BO = \frac{3}{5}NK = 9,6$;

4) $AB = 19,2$ см.

Ответ: 19,2 см.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верное, все его шаги выполнены обоснованы, получен верный ответ	4
Решение задачи в целом верное, получен верный ответ, но решение обосновано недостаточно или решение задачи в целом верное, но допущена одна вычислительная ошибка, из-за которой получен неверный ответ	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
<i>Максимальный балл</i>	4

