

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** Решите уравнение  $6\cos^2x - 7\cos x - 5 = 0$ . Укажите корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

**Решение.**

Сделаем замену  $\cos x = y$  и получим квадратное уравнение  $6y^2 - 7y - 5 = 0$ , корнями которого являются числа  $-\frac{1}{2}$  и  $\frac{5}{3}$ .

Уравнение  $\cos x = \frac{5}{3}$  не имеет решений, а из уравнения  $\cos x = -\frac{1}{2}$  находим:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Корни уравнения:  $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ .

Найдем корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

$$-\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2\pi; \quad -\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{8}{6} : n = 0, x = -\frac{2\pi}{3}; n = 1, x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$-\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi; \quad -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{2}{3} : k = 0, x = \frac{2\pi}{3}.$$

Отрезку  $[-\pi; 2\pi]$  принадлежат только корни  $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ .

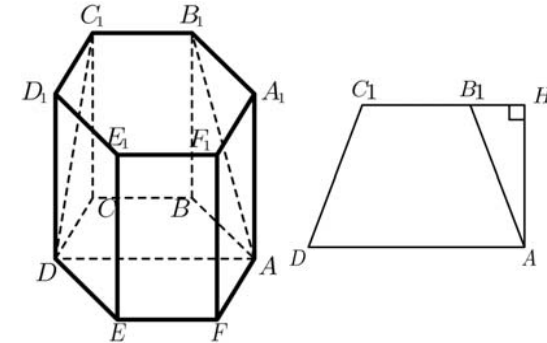
**Ответ:**  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Отрезку принадлежат корни  $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**C2** В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , все рёбра которой равны 4, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$ .

**Решение.**

Так как  $ABCDEF$  — правильный шестиугольник, то прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны, параллельны также прямые  $BC$  и  $B_1C_1$ , следовательно, прямые  $AD$  и  $B_1C_1$  параллельны. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$  равно расстоянию между прямыми  $AD$  и  $B_1C_1$ .



В трапеции  $DC_1B_1A$   $B_1C_1 = 4, DA = 8, DC_1 = B_1A = 4\sqrt{2}$ .

$$B_1H = \frac{DA - C_1B_1}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2, \text{ тогда } AH = 2\sqrt{7}.$$

**Ответ:**  $2\sqrt{7}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**С3** Решите неравенство

$$\frac{\log_{7^{x+3}} 49}{\log_{7^{x+3}} (-49x)} \leq \frac{1}{\log_7 \log_{\frac{1}{7}} 7^x}.$$

**Решение.**

Решение ищем на множестве:

$$\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -\frac{1}{49}, \\ x \neq -3, \\ x < 0. \end{cases}$$

Пусть  $\log_7(-x) = t$ , тогда  $\frac{2}{2+t} \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow t \in (-\infty; -2) \cup (0; 2]$ .

Значит,  $x \in [-49; -1) \cup (-\frac{1}{49}; 0)$ .

С учетом ограничений получаем:  $x \in [-49; -3) \cup (-3; -1) \cup (-\frac{1}{49}; 0)$ .

**Ответ:**  $[-49; -3) \cup (-3; -1) \cup (-\frac{1}{49}; 0)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек (не включены в ответ 0 или 6)	2
Полученный ответ неверен, решено верно только дробно-рациональное неравенство без учёта области допустимых значений переменной неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**С4** Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно  $\frac{7}{24}$ .

**Решение.**

Обозначим треугольник  $ABC$ . Предположим, что отрезок отсекает от треугольника  $ABC$  треугольник  $ANM$  (см. рис. 1).

Обозначим точки касания окружности и прямых  $P, Q, R, S$  (см. рис. 1). Так как  $OQMR$  и  $OPCS$  – квадраты,  $MQ = PC = r$ , где  $r$  – радиус окружности. Кроме того,  $NQ = NP$ . Значит,  $NM = NC$ .

$BN$  – биссектриса угла  $ABC$ . Треугольники  $NMB$  и  $NCB$  равны по гипотенузе и катету.

Пусть  $CB = 7x$ , а  $CA = 24x$ . По теореме Пифагора  $AB = 25x$ .

Тогда  $AM = AB - BM = 25x - 7x = 18x$ . Из подобия

треугольников  $AMN$  и  $ACB$  получаем:  $\frac{CB}{NM} = \frac{CA}{AM}$ , откуда  $\frac{7x}{14} = \frac{24x}{18x}$ .

Следовательно,  $x = \frac{8}{3}$ . Найдём радиус окружности:

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6x}{2} = 3x = 8.$$

Если отрезок отсекает треугольник  $BMN$  (рис. 2), то, рассуждая аналогично, находим, что  $BM = 25x - 24x = x$ .

Из подобия треугольников следует  $\frac{ACB}{NMB}$  и  $NMB$  следует  $\frac{CA}{NM} = \frac{CB}{BM}$ , откуда получаем  $\frac{24x}{14} = \frac{7x}{x}$ ,  $x = \frac{49}{12}$ .

Тогда  $r = 3x = \frac{49}{4} = 12,25$ .

**Ответ:** 8 или 12,25.

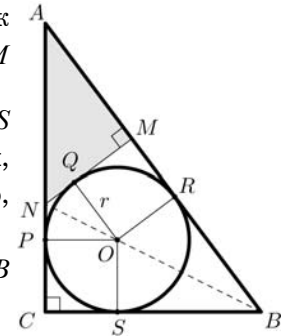


Рис. 1

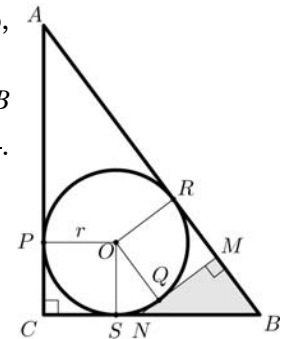


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

**С5** Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x-9|)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ (x+3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.**

Первое уравнение задаёт на плоскости окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  радиуса 3, симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей — точки  $C_1(9; 5)$  и  $C_2(-9; 5)$ . Второе уравнение — уравнение окружности  $\omega$  радиуса  $a > 0$  с центром  $C(-3; 0)$ .

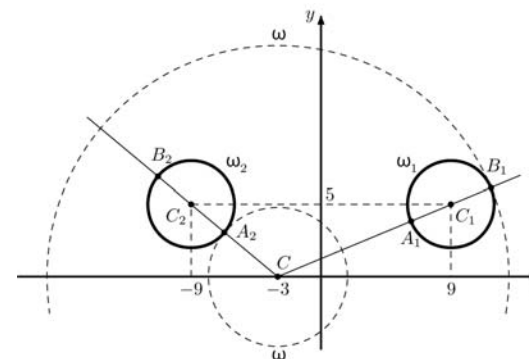
Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность  $\omega$  касается одной из окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , но не имеет общих точек с другой окружностью.

Из точки  $C$  проведём лучи  $CC_1$  и  $CC_2$  и обозначим  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$  точки их пересечения с окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (см. рис.).

Заметим, что  $CC_2 < CC_1$ , поэтому  $CA_2 < CA_1$  и  $CB_2 < CB_1$ . Значит, если  $a = CA_2$ , то  $\omega$  касается  $\omega_2$ , но не имеет общих точек с  $\omega_1$ . Если  $a = CB_1$ , то  $\omega$  касается  $\omega_1$ , но не имеет общих точек с  $\omega_2$ .

$$CA_2 = CC_2 - C_2A_2 = \sqrt{(9-3)^2 + 5^2} - 3 = \sqrt{61} - 3;$$

$$CB_1 = CC_1 + C_1B_1 = \sqrt{(9+3)^2 + 5^2} + 3 = 13 + 3 = 16.$$



Сравним  $CA_1$  и  $CB_2$ :

$$CA_1 = \sqrt{(9+3)^2 + 5^2} - 3 = 10, CB_2 = \sqrt{(9-3)^2 + 5^2} + 3 = \sqrt{61} + 3.$$

Получаем  $CA_1 < CB_2$ . Значит, если  $\omega$  касается  $\omega_1$  в точке  $A_1$ , то  $\omega$  пересекает  $\omega_2$  в двух точках. Аналогично, если  $\omega$  касается  $\omega_2$  в точке  $B_2$ , то  $\omega$  пересекает  $\omega_1$  в двух точках.

Следовательно, других решений, кроме двух найденных, система не имеет.

**Ответ:**  $\sqrt{61} - 3$  или 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения (не учтено условие $a > 0$ ); – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

**С6** Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

- а) пять;  
б) четыре;  
в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

**Решение.**

Пусть  $n$  – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1512.

$1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$ . Следовательно, члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7.

Пусть первый член равен  $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ , а знаменатель прогрессии равен  $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$  ( $a, b, c, d, e, f$  – целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел  $d, e, f$  больше нуля). Тогда произведение чисел равно

$$\begin{aligned} 2^{na+d+2d+\dots+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+\dots+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+\dots+(n-1)f} = \\ = 2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}. \end{aligned}$$

Полученное число является делителем числа  $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$ . Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \leq 3, \quad nb + \frac{(n-1)ne}{2} \leq 3 \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \leq 1. \quad (1)$$

Если  $n \geq 4$ , то  $na + \frac{(n-1)nd}{2} \geq 4a + 6d$ .

Аналогично,

$$nb + \frac{(n-1)ne}{2} \geq 4b + 6e \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \geq 4c + 6f.$$

Неравенства

$$4a + 6d \leq 3, \quad 4b + 6e \leq 3 \quad \text{и} \quad 4c + 6f \leq 1$$

имеют целые неотрицательные решения только при  $d = e = f = 0$ , что невозможно.

Следовательно,  $n \leq 3$ . Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) – ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит 1512.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при  $n = 3$ . Положим  $a = b = c = e = f = 0, \quad d = 1$ .

Получаем три члена геометрической прогрессии 1, 2, 4. Их произведение равно 8.  $\frac{1512}{8} = 189 = 3 \cdot 63$ . Следовательно, в качестве четвертого и пятого

можно взять, например, числа 3 и 63:  $1512 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 63$ .

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** Решите уравнение  $4\sin^2x - 12\sin x + 5 = 0$ . Укажите корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

**Решение.**

Сделаем замену  $\sin x = y$  и получим квадратное уравнение  $4y^2 - 12y + 5 = 0$ , корнями которого являются числа  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{5}{2}$ .

Уравнение  $\sin x = \frac{5}{2}$  не имеет решений, а из уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  находим:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Корни уравнения:  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ , где  $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ .

Найдем корни, принадлежащие отрезку  $[-\pi; 2\pi]$ .

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi; \quad -\frac{7}{12} \leq n \leq \frac{11}{12} : \quad n = 0, \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

$$-\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi; \quad -\frac{11}{12} \leq k \leq \frac{7}{12} : \quad k = 0, \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

Отрезку  $[-\pi; 2\pi]$  принадлежат только корни  $\frac{\pi}{6}$  и  $\frac{5\pi}{6}$ .

**Ответ:**  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Отрезку  $[-\pi; 2\pi]$  принадлежат корни:

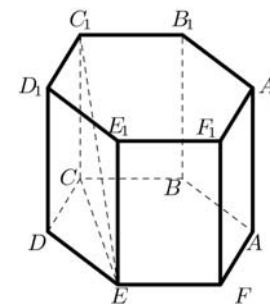
$$\frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{5\pi}{6}.$$

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**C2** В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , все рёбра которой равны 10, найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $B_1C_1$ .

**Решение.**

Так как  $ABCDEF$  — правильный шестиугольник, прямые  $BC$  и  $CE$  перпендикулярны. Поскольку прямые  $BC$  и  $B_1C_1$  параллельны,  $CE$  перпендикулярно  $B_1C_1$ . Тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $EC_1$  перпендикулярно  $B_1C_1$ , так что длина отрезка  $EC_1$  равна искомому расстоянию.



$CE = 10\sqrt{3}$ ; по условию  $CC_1 = 10$ . По теореме Пифагора для треугольника  $ECC_1 : EC_1 = 20$ .

**Ответ:** 20.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7\log_9(x^2 - x - 6) \leq 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3}, \\ \frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} < 52. \end{cases}$$

**Решение.**

Решим первое неравенство.

$$\begin{cases} \log_9 \frac{(x^2 - x - 6)^7 \cdot (x - 3)}{(x + 2)^7} \leq 8, \\ (x - 3)(x + 2) > 0; \end{cases} \begin{cases} \log_9(x - 3)^8 \leq 8, \\ (x - 3)(x + 2) > 0; \end{cases} \begin{cases} (x - 3)^8 \leq 9^8, \\ (x - 3)(x + 2) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 3)^2 \leq 9^2, \\ (x - 3)(x + 2) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 12)(x + 6) \leq 0, \\ (x - 3)(x + 2) > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является:  $-6 \leq x - 2, 3 < x \leq 12$ .

Решим второе неравенство данной системы:

$$\frac{1}{3^{x-1}} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) < 52; \frac{1}{3^{x-1}} \cdot \frac{13}{9} < 52; 3^{x-1} > \frac{1}{36}; x - 1 > \log_3 \frac{1}{36}; x > -1 - \log_3 4.$$

Решением второго неравенства системы является:  $x > -1 - \log_3 4$ .

$$-6 < -1 - \log_3 4 < -2.$$

Решение исходной системы неравенств:  $-1 - \log_3 4 < x < -2, 3 < x \leq 12$ .

**Ответ:**  $(-1 - \log_3 4; -2), (3; 12]$ .

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**С4**

Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно  $\frac{15}{8}$ .

**Решение.**

Обозначим треугольник  $ABC$ . Предположим, что отрезок отсекает от треугольника  $ABC$  треугольник  $ANM$  (см. рис. 1).

Обозначим точки касания окружности и прямых  $P, Q, R, S$  (см. рис. 1). Так как  $OQMR$  и  $OPCS$  — квадраты,  $MQ = PC = r$ , где  $r$  — радиус окружности. Кроме того,  $NQ = NP$ . Значит,  $NM = NC$ .  $BN$  — биссектриса угла  $ABC$ . Треугольники  $NMB$  и  $NCB$  равны по гипотенузе и катету.

Пусть  $CB = 8x$ , а  $CA = 15x$ . По теореме Пифагора  $AB = 17x$ . Тогда  $AM = AB - BM = 17x - 8x = 9x$ . Из подобия треугольников  $AMN$  и  $ACB$  получаем:  $\frac{CB}{NM} = \frac{CA}{AM}$ ,

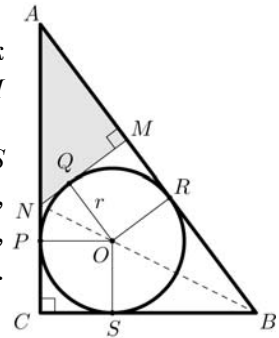


Рис. 1

откуда  $\frac{8x}{40} = \frac{15x}{9x}$ .

Следовательно,  $x = \frac{25}{3}$ . Найдём радиус окружности:

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6x}{2} = 3x = 25.$$

Если отрезок отсекает треугольник  $BNM$  (рис. 2), то, рассуждая аналогично, находим, что  $BM = 17x - 15x = 2x$ . Из подобия треугольников  $ACB$  и  $NMB$  получаем:  $\frac{CA}{NM} = \frac{CB}{BM}$ , откуда  $\frac{15x}{40} = \frac{8x}{2x}$ ,  $x = \frac{32}{3}$ . Тогда  $r = 3x = 32$ .

**Ответ:** 25 или 32.

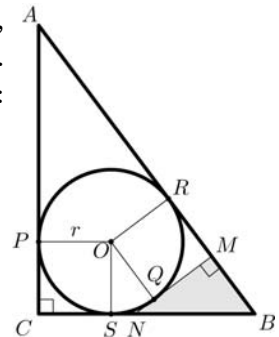


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$  больше 1.

**Решение.**

1. Функция  $f$  имеет вид:

а) при  $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ :  $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$ , а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x = 4 - a$ ;

б) при  $x^2 - 8x + 7 < 0$ :  $f(x) = -x^2 + (2a+8)x - 7$ , а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции  $f(x)$  показаны на рисунках:

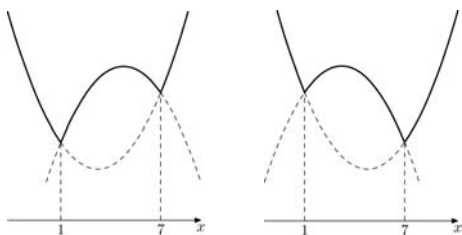


Рис. 1

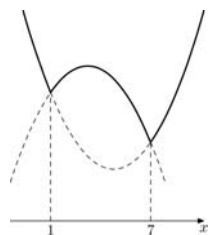


Рис. 2

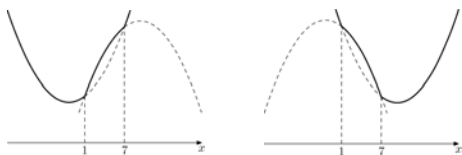


Рис. 3

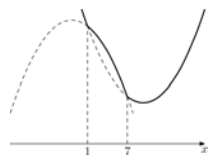


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции  $f(x)$  может приниматься только в точках  $x = 1$  или  $x = 7$ , а если  $4 - a \notin [1; 7]$  – то в точке  $x = 4 - a$ .

3. Наименьшее значение функции  $f$  больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > \frac{1}{14}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ \frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq a < 4 + \sqrt{6} \\ \frac{1}{2} < a < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$$

**Ответ:**  $\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

**С6** Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

- а) пять;  
б) четыре;  
в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

**Решение.**

Пусть  $n$  – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1008.

$1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ . Следовательно, члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7.

Пусть первый член равен  $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ , а знаменатель прогрессии равен  $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$  ( $a, b, c, d, e, f$  – целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел  $d, e, f$  больше нуля). Тогда произведение чисел равно

$$\begin{aligned} & 2^{na+d+2d+\dots+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+\dots+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+\dots+(n-1)f} = \\ & = 2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}. \end{aligned}$$

Полученное число является делителем числа  $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ . Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \leq 4, \quad nb + \frac{(n-1)ne}{2} \leq 2 \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \leq 1. \quad (1)$$

Если  $n \geq 4$ , то  $na + \frac{(n-1)nd}{2} \geq 4a + 6d$ .

Аналогично,

$$nb + \frac{(n-1)ne}{2} \geq 4b + 6e \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \geq 4c + 6f.$$

Неравенства  $4a + 6d \leq 4$ ,  $4b + 6e \leq 2$  и  $4c + 6f \leq 1$  имеют целые неотрицательные решения только при  $d = e = f = 0$ , что невозможно.

Следовательно,  $n \leq 3$ . Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) – ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит 1008.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при  $n = 3$ .

Положим  $a = b = c = e = f = 0$ ,  $d = 1$ .

Получаем три члена геометрической прогрессии 1, 2, 4. Их произведение равно 8.

$\frac{1008}{8} = 126 = 3 \cdot 42$ . Следовательно, в качестве четвертого и пятого можно взять,

например, числа 3 и 42:  $1008 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 42$ .

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4