Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Сократите дробь $\dfrac{12^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot 3^{n+3}}$.

Решение.

$$\frac{12^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot 3^{n+3}}=\frac{\left(2^2\cdot 3\right)^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot 3^{n+3}}=\frac{2^{2n+2}\cdot 3^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot 3^{n+3}}=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Верно применены свойства степени с целым показателем, но допущена вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20 Моторная лодка прошла против течения реки 60 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 45 минут меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч – скорость моторной лодки в неподвижной воде, $(x+2)$ км/ч – скорость лодки по течению реки, $(x–2)$ км/ч – скорость лодки против течения реки. Тогда время, затраченное моторной лодкой на путь против течения реки, равно $\dfrac{60}{x-2}$ часам, что, по условию задачи, на 45 минут $=\dfrac{3}{4}$ часа больше, чем время, затраченное моторной лодкой на путь по течению реки, равное $\dfrac{60}{x+2}$ часам. Поэтому

$$\frac{60}{x-2}-\frac{60}{x+2}=\frac{3}{4};$$
$$x^2=324,\ x\neq\pm 2;$$
$$x_1=-18,\ x_2=18.$$

$x=-18$ не удовлетворяет условию задачи ($x>0$). Поэтому $x=18$.

© МИОО, 2011 г.

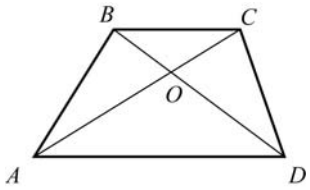
Значит, скорость моторной лодки в неподвижной воде равна 18 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	3
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

21 В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O. Докажите подобие треугольников AOD и COB.

Решение.



Так как основания трапеции AD и BC параллельны, то углы DAC и BCA равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC (см. рисунок).

Углы AOD и COB равны как вертикальные.

Следовательно, треугольники AOD и COB подобны по признаку подобия треугольников – по двум углам.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно	3
Решение не доведено до конца, но доказано, что улы соответствующих треугольников равны	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

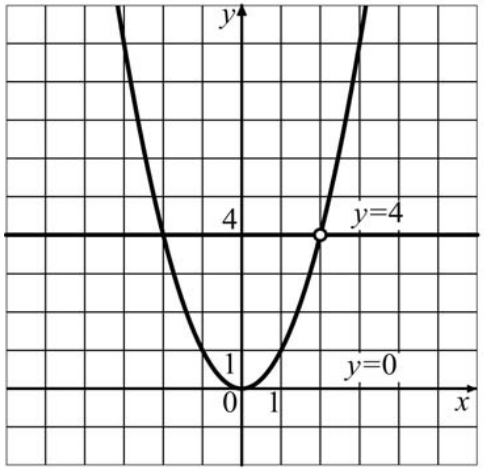
© МИОО, 2011 г.

22 Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ и определите, при каких значениях b прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2,\ x \neq 2.$$

Следовательно, графиком данной функции является парабола $y = x^2$ с выколотой точкой (2; 4).



Значит, прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $b = 0$ и $b = 4$ (см. рисунок). При любых других значениях b данная прямая либо пересекает график функции в двух точках, либо не имеет с графиком данной функции ни одной общей точки.

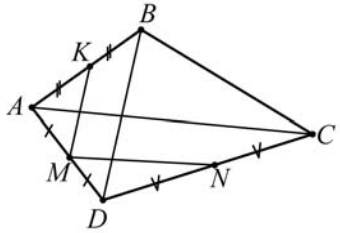
Ответ: при $b = 0$ и $b = 4$.

© МИОО, 2011 г.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но не указано значение параметра b	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

23 Расстояния от середины стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ до середин сторон AB и CD равны соответственно 6 см и 12 см. Найдите длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Решение.



Пусть K, M и N – середины сторон AB, AD и CD соответственно (см. рисунок), следовательно, MK – средняя линия треугольника ABD, MN – средняя линия треугольника ACD. $MK = 6$ см, $MN = 12$ см – по условию. По свойству средней линии треугольника $MK = \frac{1}{2}BD$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Значит, $BD = 2\,MK = 2 \cdot 6 = 12$ (см), $AC = 2\,MN = 2 \cdot 12 = 24$ (см).

Ответ: 12 см и 24 см.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Сократите дробь $\dfrac{100^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot 25^{n+2}}$.

Решение.

$$\frac{100^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot 25^{n+2}}=\frac{\left(2^2\cdot 5^2\right)^{n+1}}{2^{2n-1}\cdot\left(5^2\right)^{n+2}}=\frac{2^{2n+2}\cdot 5^{2n+2}}{2^{2n-1}\cdot 5^{2n+4}}=\frac{2^3}{5^2}=\frac{8}{25}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Верно применены свойства степени с целым показателем, но допущена вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 160 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается ровно через 20 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч – скорость течения реки, $(18 + x)$ км/ч – скорость теплохода по течению реки, $(18 - x)$ км/ч – скорость теплохода против течения реки. Тогда время, затраченное теплоходом на путь по течению реки, равно $\dfrac{160}{18+x}$ часам, время, затраченное теплоходом на путь против течения реки, равно $\dfrac{160}{18-x}$ часам. Значит, с учетом стоянки 2 часа, на путь туда и обратно теплоход затратил $20 - 2 = 18$ часов:

$$\frac{160}{18+x}+\frac{160}{18-x}=18;$$
$$x^2=4,\ x\neq\pm 18;$$
$$x_1=-2,\ x_2=2.$$

$x = -2$ не удовлетворяет условию задачи ($x > 0$). Поэтому $x = 2$.

© МИОО, 2011 г.

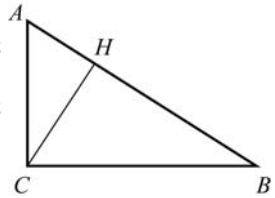
Значит, скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: 2 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	3
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

21 В прямоугольном треугольнике ABC (угол C равен 90°) проведена высота CH. Докажите подобие треугольников ACH и ABC.

Решение.



Так как CH – высота треугольника ABC, то треугольник ACH – прямоугольный ($\angle H = 90°$ – см. рисунок).

Следовательно, треугольники ACH и ABC подобны как прямоугольные по острому углу ($\angle A$ – общий).

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно	3
Решение не доведено до конца, но доказано, что углы треугольников равны	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

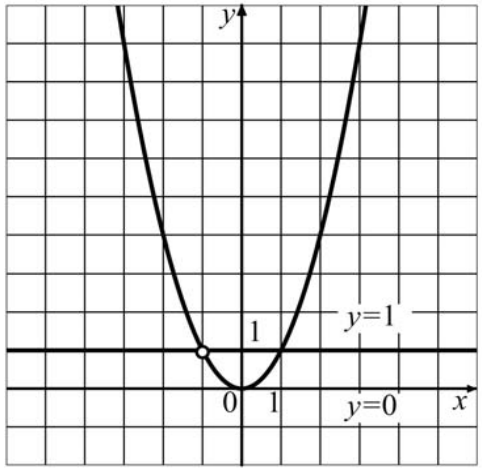
© МИОО, 2011 г.

22 Постройте график функции $y = \frac{x^3 + x^2}{x+1}$ и определите, при каких значениях b прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$\frac{x^3 + x^2}{x+1} = \frac{x^2(x+1)}{x+1} = x^2,\ x \neq -1.$$

Следовательно, графиком данной функции является парабола $y = x^2$ с выколотой точкой (– 1; 1).



Значит, прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $b = 0$ и $b = 1$ (см. рисунок). При любых других значениях b данная прямая либо пересекает график функции в двух точках, либо не имеет с графиком данной функции ни одной общей точки.

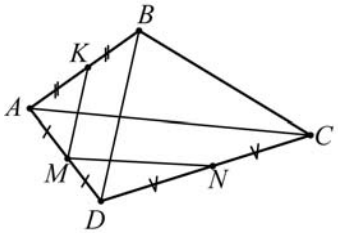
Ответ: при $b = 0$ и $b = 1$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но не указано значение параметра b	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

23 Расстояния от середины стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ до середин сторон AB и CD равны соответственно 8 см и 14 см. Найдите длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Решение.



Пусть K, M и N – середины сторон AB, AD и CD соответственно (см. рисунок), следовательно, MK – средняя линия треугольника ABD, MN – средняя линия треугольника ACD. $MK = 8$ см, $MN = 14$ см – по условию.

По свойству средней линии треугольника $MK = \frac{1}{2}BD$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Значит, $BD = 2\,MK = 2 \cdot 8 = 16$ (см), $AC = 2\,MN = 2 \cdot 14 = 28$ (см).

Ответ: 16 см и 28 см.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	2,5
2	1500
3	198
4	–2
5	0,25
6	1
7	3
8	2
9	3

№ задания	Ответ
10	-1/4, 1
11	8
12	(1,75;12,25)
13	24
14	(2/3, 1]
15	–78
16	7
17	7
18	3

© МИОО, 2011 г.

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	2,5
2	972
3	4
4	-1
5	0,2
6	2
7	1
8	3
9	150

№ задания	Ответ
10	1;5/4
11	6
12	(-0,3;-6,3)
13	4
14	[1, 2)
15	–2,825
16	0,2
17	4
18	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение $x^6 = (5x-4)^3$.

Решение. $x^6 = (5x-4)^3$; $x^2 = 5x-4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Корни этого уравнения: $x = 1$, $x = 4$.

Ответ: 1; 4.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20 Решите неравенство $\dfrac{5x+3}{\sqrt{15}-4,01} \geq 0$.

Решение. Так как

$$\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 < 4,01, \text{ то}$$

$$\sqrt{15} - 4,01 < 0.$$

Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству:

$$5x+3 \leq 0,\ 5x \leq -3,\ x \leq -0,6.$$

Ответ: $x \leq -0,6$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	3
Верно оценен знаменатель, при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число изменен знак неравенства, но при решении равносильного неравенства допущена вычислительная ошибка	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

21 Две последовательности заданы формулами своих общих членов: $x_k = 7k-2$, $y_m = 5m-2$. Найдите наименьшее из чисел, являющихся членами обеих последовательностей.

Решение. По условию задачи надо найти наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию $x_k = y_m$. То есть

$$7k-2 = 5m-2,\ 7k = 5m,\ k = \frac{5}{7}m.$$

Но k и m – натуральные числа, поэтому m – наименьшее натуральное число, кратное 7. Значит,

$$m = 7,\ k = \frac{5}{7}\cdot 7 = 5 \text{ и } x_5 = y_7 = 5\cdot 7 - 2 = 33.$$

Ответ: 33.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ (возможно другое объяснение)	3
Получен верный ответ, нет объяснения, что выбранное число – искомое	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

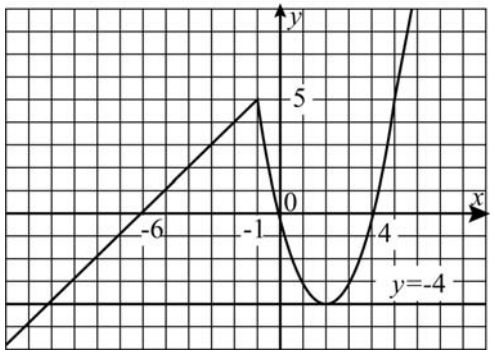
22 Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2-4x, & x \geq -1, \\ x+6, & x < -1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2-4x, & x \geq -1, \\ x+6, & x < -1. \end{cases}$$

Следовательно, графиком данной функции является объединение части параболы $y = x^2-4x$ при $x \geq -1$ и части прямой $y = x+6$ при $x < -1$ (см. рисунок).

© МИОО, 2011 г.



Значит, прямая $y = c$ имеет с графиком две общие точки при $c = -4$ и $c = 5$. При любых других значениях с данная прямая пересекает график функции в одной точке (при $c < -4$ или $c > 5$) или в трех точках (при $-4 < c < 5$).

Ответ: – 4; 5.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но указано только одно значение параметра c	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

23 На изготовление 180 деталей первый рабочий тратит на 3 часа меньше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

Решение. Пусть второй рабочий делает x деталей в час, первый – $(x+3)$ детали в час. Тогда время, затраченное вторым рабочим на изготовление 180 деталей, равно $\frac{180}{x}$ часам, что, по условию задачи, на 3 часа больше, чем время, затраченное первым рабочим, равное $\frac{180}{x+3}$ часам. Поэтому

© МИОО, 2011 г.

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+3} = 3;$$
$$x^2 + 3x - 180 = 0,\ x \neq 0,\ x \neq -3;$$
$$x_1 = -15,\ x_2 = 12.$$

$x = -15$ не удовлетворяет условию задачи $x > 0$. Поэтому $x = 12$.
Значит, второй рабочий делает 12 деталей в час.

Ответ: 12 деталей.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение $(7x-12)^3 = x^6$.

Решение. $(7x-12)^3 = x^6$; $7x-12 = x^2$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Корни этого уравнения: $x = 3$, $x = 4$.

Ответ: 3; 4.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, но допущена одна вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

20 Решите неравенство $\dfrac{2x+5}{\sqrt{8}-3,01} \le 0$.

Решение. Так как

$$\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < 3,01,$$

то

$$\sqrt{8} - 3,01 < 0.$$

Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству:

$$2x+5 \ge 0,\ 2x \ge -5,\ x \ge -2,5.$$

Ответ: $x \ge -2,5$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	3
Верно оценен знаменатель, при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число изменен знак неравенства, но при решении равносильного неравенства допущена вычислительная ошибка	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

21 Две последовательности заданы формулами своих общих членов: $x_k = 12k+5$, $y_m = 13m+5$. Найдите наименьшее из чисел, являющихся членами обеих последовательностей.

Решение. По условию задачи надо найти наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию $x_k = y_m$.

То есть

$$12k+5 = 13m+5,\ 12k = 13m,\ k = \frac{13}{12}m.$$

Но k и m – натуральные числа, поэтому m – наименьшее натуральное число, кратное 12. Значит,

$$m = 12,\ k = \frac{13}{12}\cdot 12 = 13 \text{ и } x_{13} = y_{12} = 12\cdot 13+5 = 161.$$

Ответ: 161.

Содержание критерия	Балл
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ (возможно другое объяснение)	3
Получен верный ответ, нет объяснения, что выбранное число – искомое	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

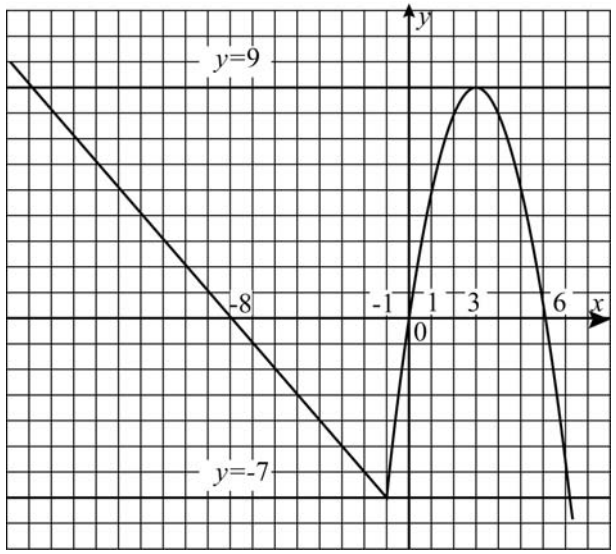
22 Постройте график функции $y = \begin{cases} 6x - x^2, & x \ge -1, \\ -x-8, & x < -1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} 6x - x^2, & x \ge -1, \\ -x-8, & x < -1. \end{cases}$$

© МИОО, 2011 г.

Следовательно, графиком данной функции является объединение части параболы $y = 6x - x^2$ при $x \geq -1$ и части прямой $y = -x - 8$ при $x < -1$ (см. рисунок).



Значит, прямая $y = c$ имеет с графиком две общие точки при $c = -7$ и $c = 9$. При любых других значениях c данная прямая пересекает график функции в одной точке (при $c < -7$ или $c > 9$) или в трех точках (при $-7 < c < 9$).

Ответ: –7; 9.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но указано только одно значение параметра c	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

23 На изготовление 80 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 90 таких же деталей. Известно, что второй рабочий за час делает на 1 деталь меньше, чем первый. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение. Пусть второй рабочий делает x деталей в час, первый – $(x+1)$ деталь в час. Тогда время, затраченное вторым рабочим на изготовление 90 деталей, равно $\frac{90}{x}$ часам, что, по условию задачи, на 2 часа больше, чем время, затраченное первым рабочим, равное $\frac{80}{x+1}$ часам. Поэтому

$$\frac{90}{x} - \frac{80}{x+1} = 2;$$
$$x^2 - 4x - 45 = 0,\ x \neq 0,\ x \neq -1;$$
$$x_1 = -5,\ x_2 = 9.$$

$x = -5$ не удовлетворяет условию задачи ($x > 0$). Поэтому $x = 9$.
Значит, второй рабочий делает 9 деталей в час.

Ответ: 9 деталей.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

© МИОО, 2011 г.

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	4
2	2
3	1
4	4
5	–72
6	3
7	8
8	–3,5; 3,5
9	1

№ задания	Ответ
10	321
11	1
12	36
13	3
14	(0,2; 4,6)
15	7
16	6
17	0,9914
18	4

© МИОО, 2011 г.

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	1
2	1
3	3
4	3
5	117
6	1
7	–1
8	–4; –0,25
9	1

№ задания	Ответ
10	312
11	3
12	3
13	4
14	(0,5; 5,5)
15	0,2
16	5
17	17/32
18	2