Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 x - 5\sin x = 0, \\ \sqrt{6y} - 2\cos x = 0. \end{cases}$

Решение.

Пусть $z = \sin x$. Первое уравнение принимает вид $2z^2 - 5z = 0$, откуда $z = 0$ или $z = \frac{5}{2}$.

Уравнение $\sin x = \frac{5}{2}$ не имеет решений.

Из второго уравнения системы следует, что $\cos x \geq 0$. Тогда из уравнения $\sin x = 0$ получаем: $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ и $\cos x = 1$.

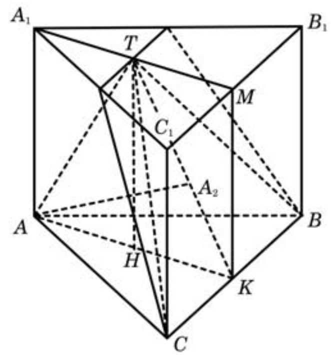
Второе уравнение принимает вид $\sqrt{6y} - 2 = 0$, откуда $y = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{2}{3}\right),\ n \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1M \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый.

Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = \frac{9}{2}$, а высота TH совпадает с высотой призмы.

Поэтому $\operatorname{tg} \angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{9}{4 \cdot 6} < 1$.

Значит, искомый угол в два раза больше: $\angle ATK = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{8}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{3}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\frac{x^2-x-2}{x-3}+\frac{x^2-2x-3}{x-2}\geq 0$.

***Решение*.**

Разложим квадратные трехчлены на множители:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-3}+\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}\geq 0;$$

$$(x+1)\left(\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-2}\right)\geq 0;$$

$$\frac{(x+1)\left((x-2)^2+(x-3)^2\right)}{(x-2)(x-3)}\geq 0.$$

Выражение $(x-2)^2+(x-3)^2$ положительно при всех x.

Значит, $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\geq 0$, откуда $-1\leq x<2$ или $x>3$.

Ответ: $[-1;2),\ (3;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=8$, $CD=15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

***Решение*.**

Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB. По теореме о касательной и секущей $AF^2=FC\cdot FD=FB^2$.

Значит, $AF=FB=4$, и F совпадает с E.

Возможны два случая взаимного расположения точек C, D и E:

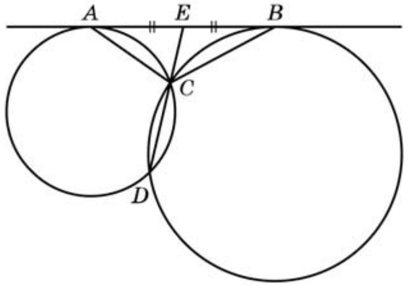


Рис. 1

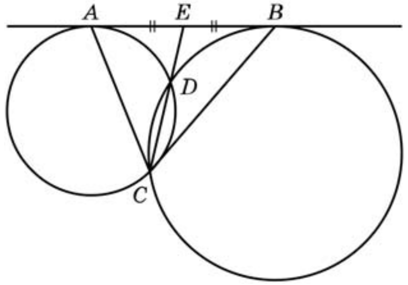


Рис. 2

1. $EC<ED$ (рис. 1).
2. $EC>ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков EC и ED, тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $4^2=x(x+15)$ или $x^2+15x-16=0$.

Значит, $x=\frac{-15+17}{2}=1$.

Поэтому $CE=x=1$ или $CE=x+15=16$.

Ответ: 16 или 1 .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7\,|x-a|-3x$ на отрезке $[-6;\,6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x\ge a$: $f(x)=x^2-7(x-a)-3x=x^2-10x+7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x\le a$: $f(x)=x^2+7(x-a)-3x=x^2+4x-7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=-2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

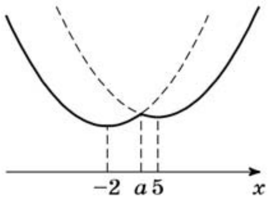


Рис. 1

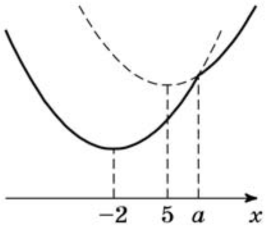


Рис. 2

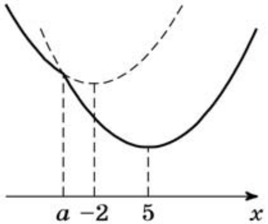


Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах a и $б$, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ f(a))$.

3. Наибольшее значение на отрезке $[-6;6]$ функция f принимает на одном из концов отрезка (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-2;\,5)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-2$; $x=5$, чем соответствующий конец отрезка.

То есть $\left[\begin{array}{l} a+2\le -2+6 \\ 5-a\le 6-5 \\ a\le -2 \\ a\ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 2 \\ a\ge 4. \end{array}\right.$

Ответ: $a\le 2$; $a\ge 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab}=a^b+23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $24=1^b+23=\overline{1b}$ или $a^1+23=\overline{a1}=10a+1$, что невозможно. Далее считаем $a>1$ и $b>1$.

Пусть $a\le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b\le 9$, так как иначе, если число b– k-значное ($k\ge 2$), имеем:

$a^b\ge 2^{(10^{k-1})}\ge 2^{10(k-1)}>10^{3(k-1)}=10^{k+(2k-3)}\ge 10^{k+1}>\overline{ab}.$

Пусть $a\ge 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b=2$ и $a\le 31$, так как иначе, если b– k-значное, а a – ($m+1$)-значно ($m\ge 1$), имеем:

если $k>1$, то $a^b\ge (10^m)^{10^{k-1}}\ge 10^{m\cdot(k+2)}=10^{(m+m)+m\cdot k}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$;

если $k=1$, $b\ge 3$, то $a^b\ge (10^m)^3=10^{(m+m)+m}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$;

если $k=1$, $b=2$, $m\ge 2$, то $a^b\ge (10^m)^2=10^{(m+m/2)+m/2}\ge 10^{(m+1)+k}>\overline{ab}$;

если $k = 1,\ b = 2,\ m = 1,\ a \geq 32$, то $a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых

либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$,

либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$,

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары $a = 3,\ b = 2;\ a = 7,\ b = 2$.

Ответ: $a = 3,\ b = 2;\ a = 7,\ b = 2$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т.п.). Например:

Остается две возможности: либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$, либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$.

В первом случае, если $a = 2$, имеем: $20 + b = 2^b + 23$, но $23 > 20$, а $2^b \geq b$.

Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$ подходит, а $b = 3$ нет.

Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \geq 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$; $a^2 - 10a + 21 = 0$, откуда получаем: $a = 3$ и $a = 7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак выражения $x - \dfrac{\pi}{3}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 осоответственно.

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\frac{x^2-x-6}{x-1}+\frac{x^2-4x+3}{x+2}\le 0$.

Ответ: $(-\infty;-2)$, $(1;3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\frac{MH}{BH}=\frac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 80 или 16.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7\left|x-a\right|-x$ на отрезке $[-6;\ 7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $a\le 0$; $a\ge 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x+17}{10}$, равно $\frac{3x+41}{3}$. Найдите все такие действительные значения x.

Ответ: $-\frac{47}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sin^2 x + 7\sin x = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$

Ответ: $\left(2\pi n; \dfrac{5}{3}\right),\ n \in Z.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 4\sqrt{3}$, $BB_1 = 9$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} - \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 2} \geq 0.$

Ответ: $(-\infty; -2)$, $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $[3; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB = 12$, $CD = 5$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Ответ: 9 или 4.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\left|x^2-4x\right|-x^2+4x-8\right|<\sqrt{a^2+2a-3}-a-(x-1)^2+2x$ имеет от одного до трех целых решений.

Ответ: $-\dfrac{21}{4}\le a\le -3,\ a\ge 1.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\dfrac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения x.

Ответ: $1;\ \sqrt{8};\ \sqrt{15};\ \sqrt{22};\ \sqrt{29};\ 6.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{-4\sin^2x+8\cos x+7}{\sqrt{\operatorname{ctg}x}}=0.$

Ответ: $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB=5\sqrt{3}$, $BB_1=6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\frac{x^2-x-2}{x-3}-\frac{x^2-2x-3}{x-2}\le 0.$

Ответ: $[-1;\,2),\ \left[\frac{5}{2};\,3\right).$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит один из верных промежутков.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\frac{KM}{KL}=\frac{1}{2}$, $\frac{PH}{MH}=\frac{3}{2}$, а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

Ответ: 150 или 30.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-9\,|x-a|-5x$ на отрезке $[-8;\,9]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $a\le 4;\ a\ge 5.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab}=a^b+18$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Ответ: $a=1,\ b=9;\ a=2,\ b=2;\ a=8,\ b=2.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0.$

Решение.

Из уравнения $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$ находим: $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -3$.

Второе уравнение не имеет решений, а из первого получаем, что $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Из условия $x - \frac{\pi}{3} > 0$ следует, что $x > \frac{\pi}{3}$.

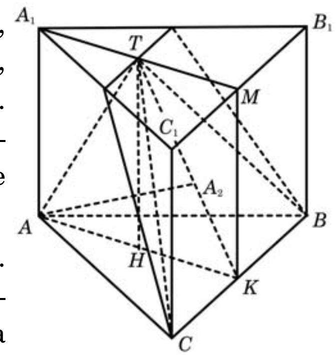
Поэтому $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак выражения $x - \frac{\pi}{3}$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Решение.



Плоскость BCT проходит через прямую BC, перпендикулярную плоскости AA_1M. Значит, $AA_1M \perp BCT$. Отрезок AT лежит в плоскости AA_1M. Следовательно, проекция точки A на плоскость BCT – точка A_2 – лежит в плоскости AA_1M на прямой TK, где K – середина BC. Значит, угол ATK – искомый.

Треугольники AA_1T и KMT равны по двум катетам. Следовательно, $AT = TK$, и треугольник ATK – равнобедренный. Его основание AK – медиана равностороннего треугольника ABC: $AK = \frac{9}{2}$, а высота TH совпадает с высотой призмы. Поэтому $\operatorname{tg}\angle ATH = \frac{AH}{TH} = \frac{9}{4 \cdot 6} < 1$. Значит, искомый угол в два раза больше: $\angle ATK = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{8}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{3}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{5^{x+8}}14}{\log_{5^{x+8}}\left(x^2-25\right)} \geq \dfrac{\log_2\left(x^2+9x+14\right)}{\log_2\left(x^2-25\right)}$.

Решение.

Решение ищем на множестве:

$$\begin{cases} x \neq -8, \\ x^2-25>0, \\ x^2-25 \neq 1, \\ x^2+9x+14>0 \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in (-\infty;\,-8) \cup (-8;\,-7) \cup (5;\,\sqrt{26}) \cup (\sqrt{26};\,+\infty).$$

Перепишем неравенство: $\log_{x^2-25}\left(x^2+9x+14\right) \leq \log_{x^2-25}14$.

Далее рассматриваем два случая:

1. $\begin{cases} 0<x^2-25<1, \\ x^2+9x+14 \geq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \ 5<x<\sqrt{26}.$

2. $\begin{cases} x^2-25>1, \\ x^2+9x+14 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \ \begin{cases} x^2>26, \\ -9 \leq x \leq 0. \end{cases}$

Значит, $x \in [-9;\,-\sqrt{26})$.

С учетом ограничений на x получаем:

$x \in [-9;\,-8) \cup (-8;\,-7) \cup (5;\,\sqrt{26})$.

Ответ: $[-9;\,-8) \cup (-8;\,-7) \cup (5;\,\sqrt{26})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB=8$, $CD=15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Решение.

Пусть F – точка пересечения прямой CD с отрезком AB. По теореме о касательной и секущей $AF^2 = FC \cdot FD = FB^2$.

Значит, $AF = FB = 4$, и F совпадает с E.

Возможны два случая взаимного расположения точек C, D и E:

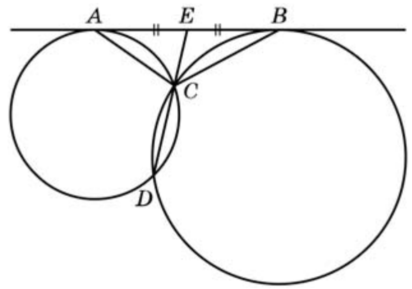


Рис. 1

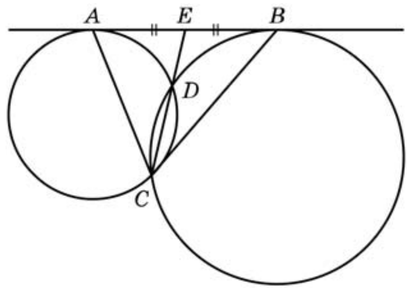


Рис. 2

1. $EC < ED$ (рис. 1).
2. $EC > ED$ (рис. 2).

Пусть x – длина меньшего из отрезков EC и ED, тогда, используя теорему о секущей и касательной, получаем: $4^2 = x(x+15)$ или $x^2+15x-16=0$.

Значит, $x = \dfrac{-15+17}{2}$.

Поэтому $CE = x$ или $CE = x+15$.

Ответ: 16 или 1 .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7\left|x-a\right|-3x$ на отрезке $[-6;\ 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \ge a$: $f(x)=x^2-7(x-a)-3x=x^2-10x+7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x \le a$: $f(x)=x^2+7(x-a)-3x=x^2+4x-7a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=-2$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

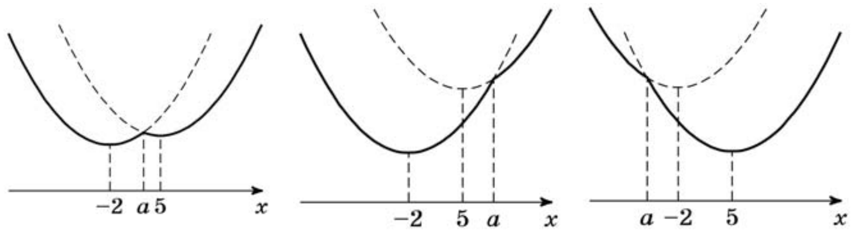


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

2. Ни одна из квадратичных функций, указанных в пунктах *а* и *б*, не имеет точек максимума. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a;\ f(a))$.

3. Наибольшее значение функции f принимается на одном из концов отрезка $[-6;\ 6]$ (или на обоих) тогда и только тогда, когда точка $x=a$ расположена вне интервала $(-2;\ 5)$ или же внутри, но не дальше от одной из точек $x=-2;\ x=5$, чем соответствующий конец отрезка.

$$\text{То есть}\ \left[\begin{array}{c} a+2 \le -2+6 \\ 5-a \le 6-5 \\ a \le -2 \\ a \ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le 2 \\ a \ge 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \le 2;\ a \ge 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab}=a^b+23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение.

В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $24=1^b+23=\overline{1b}$ или $a^1+23=\overline{a1}=10a+1$, что невозможно. Далее считаем $a>1$ и $b>1$.

Пусть $a \le 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \le 9$, так как иначе, если число b– k-значное ($k \ge 2$), имеем:

$a^b \ge 2^{(10^{k-1})} \ge 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \ge 10^{k+1} > \overline{ab}$.

Пусть $a \ge 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b=2$ и $a \le 31$, так как иначе, если b– k-значное, а a – ($m+1$)-значно ($m \ge 1$), имеем:

если $k>1$, то $a^b \ge (10^m)^{10^{k-1}} \ge 10^{m\cdot(k+2)} = 10^{(m+m)+m\cdot k} \ge 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k=1,\ b \ge 3$, то $a^b \ge (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \ge 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k=1,\ b=2,\ m \ge 2$, то $a^b \ge (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \ge 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$;

если $k=1,\ b=2,\ m=1,\ a \ge 32$, то $a^b \ge (32)^2 \ge 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}$.

Конечным перебором всех пар a и b, для которых

либо $1<a \le 9$ и $1<b \le 9$,

либо $10 \le a \le 31$ и $b=2$,

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары $a=3,\ b=2;\ a=7,\ b=2$.

Ответ: $a=3,\ b=2;\ a=7,\ b=2$.

Замечание

Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т.п.). Например:

Остается две возможности: либо $1 < a \le 9$ и $1 < b \le 9$, либо $10 \le a \le 31$ и $b = 2$.

В первом случае, если $a = 2$, имеем: $20 + b = 2^b + 23$, но $23 > 20$, а $2^b > b$.

Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$ подходит, а $b = 3$ нет.

Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \ge 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$; $a^2 - 10a + 21 = 0$, откуда получаем: $a = 3$ и $a = 7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{4\cos^2 x - 8\sin x - 7}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0.$

Ответ: $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{x+6}}15}{\log_{2^{x+6}}\left(x^2-16\right)} \geq \dfrac{\log_3\left(x^2+8x+15\right)}{\log_3\left(x^2-16\right)}$.

Ответ: $[-8;\,-6)\cup(-6;\,-5)\cup(4;\,\sqrt{17})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 В треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. Известно, что $\dfrac{MH}{BH}=\dfrac{3}{2}$, а площадь треугольника AMH равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 80 или 16.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-7\left|x-a\right|-x$ на отрезке $[-6;\,7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $a\leq 0$; $a\geq 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее $\dfrac{2x+17}{10}$, равно $\dfrac{3x+41}{3}$. Найдите все такие действительные значения x.

Ответ: $-\dfrac{47}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \left(\dfrac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$

Ответ: $\left(2\pi n; \dfrac{5}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB = 4\sqrt{3}$, $BB_1 = 9$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{2x+9}(\log_{0,5}(x^2+4x))}{\log_{2x+9}(x^2+8x+17)} \geq 0$.

Ответ: $\left[-2-\dfrac{3}{\sqrt{2}};\ -4\right); \left(0;\ -2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причем $AB = 12$, $CD = 5$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

Ответ: 9 или 4.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\left|x^2-4x\right|-x^2+4x-8\right| < \sqrt{a^2+2a-3}-a-(x-1)^2+2x$ имеет от одного до трех целых решений.

Ответ: $-\frac{21}{4} \le a \le -3,\ a \ge 1.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C6 Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\frac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие действительные значения x.

Ответ: $1;\ \sqrt{8};\ \sqrt{15};\ \sqrt{22};\ \sqrt{29};\ 6.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, отсутствует одна из оценок).	3
Ответ неправильный за счет вычислительной ошибки.	2
Дано верное значение и показано, что оно удовлетворяет условию.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\frac{4\sin^2 x-8\cos x-7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}=0.$

Ответ: $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ $(\sin x)$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны ребра: $AB=5\sqrt{3}$, $BB_1=6$. Точка M – середина ребра B_1C_1, а точка T – середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{5}{8}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\dfrac{\log_{11-2x}(\log_{0,5}(x^2-6x+5))}{\log_{11-2x}(x^2-10x+26)} \geq 0.$

Ответ: $\left(5;\ 3+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right];\ \left[3-\dfrac{3}{\sqrt{2}};\ 1\right).$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек.	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $\dfrac{KM}{KL}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{PH}{MH}=\dfrac{3}{2}$, а площадь тругольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

Ответ: 150 или 30.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^2-9|x-a|-5x$ на отрезке $[-8;\ 9]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Ответ: $a \leq 4;\ a \geq 5.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки.	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна.	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6 Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab}=a^b+18$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Ответ: $a=1,\ b=9;\ a=2,\ b=2;\ a=8,\ b=2.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями.	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0