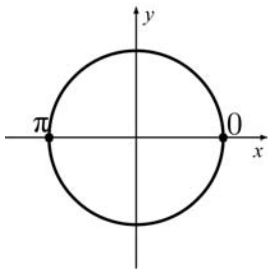
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $\dfrac{\sin x - \sin 2x}{\sqrt{2\cos x - 1}} = 0.$

Решение:



Левая часть имеет смысл при $2\cos x - 1 > 0$, то есть при $\cos x > \dfrac{1}{2}$.

Решим уравнение $\sin x - \sin 2x = 0$. Получаем:

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0;\ \ \sin x(1 - 2\cos x) = 0.$$

Учитывая, что $1 - 2\cos x \neq 0$, находим: $\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z.$

Учитывая условие $\cos x > \dfrac{1}{2}$, получаем: $x = 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z.$

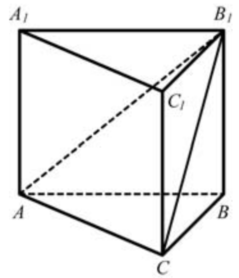
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Ответ содержит лишние решения, поскольку отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

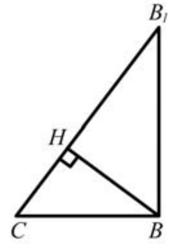
С2 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. $BC = 3$. Высота призмы равна 4. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1.

Решение:

Поскольку $AC \perp BC$ и $AC \perp BB_1$, отрезок AC перпендикулярен плоскости BCB_1. Следовательно, плоскости BCB_1 и ACB_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки B до плоскости ACB_1 равно высоте BH прямоугольного треугольника BCB_1.

$$BH = \frac{BB_1 \cdot BC}{B_1C}.\quad B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = 5.$$





Следовательно, $BH = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = 2,4.$

Ответ: 2,4.

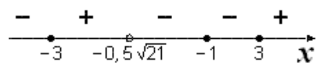
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство $\dfrac{(x^2 - x - 14)^2}{2x + \sqrt{21}} \le \dfrac{(2x^2 + x - 13)^2}{2x + \sqrt{21}}.$

Решение:

Перейдем к неравенству:

$$\frac{(x^2 - x - 14)^2 - (2x^2 + x - 13)^2}{2x + \sqrt{21}} \le 0;\ \ \frac{(3x^2 - 27)(-x^2 - 2x - 1)}{2x + \sqrt{21}} \le 0;\ \ \frac{(x-3)(x+3)(x+1)^2}{2x + \sqrt{21}} \ge 0.$$

Используем метод интервалов: 

.

Ответ: $\left[-3; -\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right), -1, \left[3; +\infty\right).$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получен ответ, отличающийся от верного ответа только конечным количеством значений переменной	2
Преобразования, в целом, верные. За счет вычислительных ошибок или неверного определения (отсутствия) ограничений получен ответ, включающий в себя верные промежутки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5 : 8, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Решение:

Пусть AD – высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O – центр вписанной окружности, P – точка ее касания с боковой стороной AB. Положим $AP = 8x$, $BP = 5x$. Тогда $AB = AP + BP = 13x$, $BD = BP = 5x$.

По теореме Пифагора $AB^2 - BD^2 = AD^2$;

$$(13x)^2 - (5x)^2 = 24^2; \quad (12x)^2 = 24^2,$$

откуда $x = 2$. Значит,

$$AP = 8x = 16, \quad BD = 5x = 10, \quad AB = 13x = 26.$$

Обозначим $\angle BAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что

$$tg\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 1), а также основания BC. Тогда D – точка касания, поэтому

$$BF = BD = 10, \quad AF = AB + BF = AB + BD = 26 + 10 = 36.$$

Следовательно,

$$r_1 = O_1F = AFtg\alpha = 36 \cdot \frac{5}{12} = 15.$$

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD – биссектрисы смежных углов BAK и CAB, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 24$.

Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB, также равен 24.

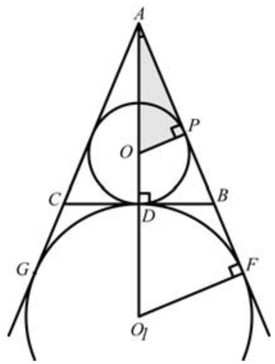


Рис.1

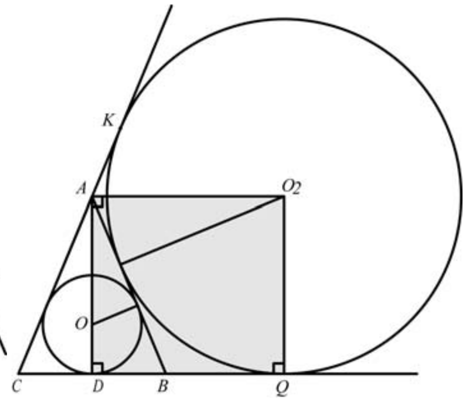


Рис.2

Ответ: 15 или 24.

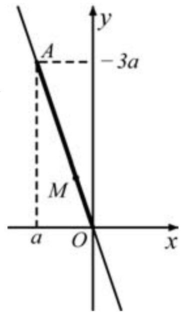
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2}=|a|\sqrt{10}, \\ y=ax+a^2-9 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение:



Если $a=0$, то система, очевидно не имеет решений. Пусть $a\neq 0$, O – начало координат, точка M имеет координаты $(x; y)$, а точка A имеет координаты $(a; -3a)$. Тогда

$$OM=\sqrt{x^2+y^2},\ MA=\sqrt{(x-a)^2+(y+3a)^2}\ \text{ и } OA=|a|\sqrt{10}.$$

Таким образом, $OM+MA=OA$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке OA.

Отрезок OA имеет более одной общей точки с прямой $y=ax+a^2-9$, только если этот отрезок лежит на прямой. Таким образом, координаты точек A и O должны удовлетворять второму уравнению системы:

$$\begin{cases} -3a=a^2+a^2-9, \\ 0=a^2-9; \end{cases} \quad \begin{cases} -3a=a^2, \\ a^2=9; \end{cases} \quad a=-3.$$

Ответ: -3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу.	3
Обоснованно найдено значение -3, однако в ответ включены посторонние значения, полученные за счет логической ошибки в рассуждениях.	2
Решение содержит - или верное описание взаимного расположения отрезка и прямой. - или верный переход к уравнениям относительно a или с параметром a относительно одной из переменных, возможно без ограничений на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Гидролог вводит в компьютер измерения температуры забортной воды. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За время наблюдений температура наблюдалась выше $10^\circ C$, но ниже $17^\circ C$. Всего гидролог ввел 32 измерения, но из-за усталости, качки судна и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой гидролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую.

После упорядочивания данных получился ряд из 32 чисел, начинающийся числами 12,2; 12,8...

Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся равно 68,8. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 13,7.

Определите, в каких числах и какие ошибки допустил гидролог.

Решение:

Пусть ряд выглядит так: 12,2; 12,8; x_3; x_4; ... x_{30}; a; b. Очевидно, что в результате упорядочивания два числа с ошибками оказались последними. Это числа a и b. Тогда

$$\frac{x_3+x_4+...+x_{30}+a+b}{30}-\frac{12,2+12,8+x_3+x_4+...+x_{30}}{30}=68{,}8–13{,}7=55{,}1,$$

откуда $\frac{a+b}{30}-\frac{12,2+12,8}{30}=55,1$ и, значит, $a+b=1653+25=1678$.

Обозначим неизвестные цифры в числах a и b буквами: $a=\overline{1mp}$ и $b=\overline{1n0q}$.

Если $p+q=8$, то $m+0=7$. Тогда $a\geq 170$, что невозможно, поскольку все измерения показывали ниже $17°$. Следовательно, $p+q=18$, откуда $p=q=9$.

Тогда $m=6$ и $n=5$. Получаем числа $a=169$ и $b=1509$.

Ответ: гидролог ошибся в числе 16,9, пропустив запятую, и в числе 15,9, поставив вместо запятой ноль.

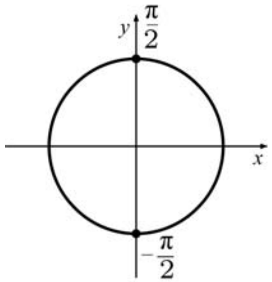
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные значения.	4
Найдена сумма ошибочных чисел, но в вычислениях допущена ошибка, возможно приведшая к неверному ответу.	3
Найдены верные решения, однако доказательство единственности отсутствует или ошибочно.	2
Найдено несколько пар чисел, среди которых есть верное решение, отбор не произведен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0.$

Решение:

Левая часть имеет смысл при $2\sin x - 1 > 0$, то есть при $\sin x > \dfrac{1}{2}$.



Решим уравнение $\cos x - \sin 2x = 0$. Получаем:

$$\cos x - 2\sin x\cos x = 0;\ \cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

Учитывая, что $1 - 2\sin x \neq 0$, находим: $\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Учитывая условие $\sin x > \dfrac{1}{2}$, получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

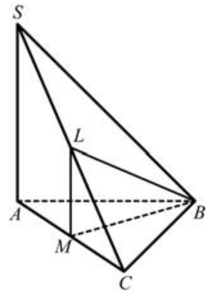
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю числитель левой части исходного уравнения. Отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

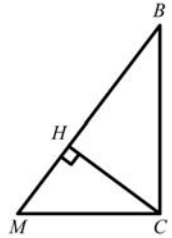
C2 Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4$, $AC = 6$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние от точки C до плоскости BLM, где L, M – середины ребер SC и AC соответственно.

Решение:

$SA \perp ABC$ и ML – средняя линия треугольника ACS, поэтому $ML \perp ABC$. Следовательно, плоскости BLM и ABC перпендикулярны. Значит, расстояние от точки C до плоскости BLM равно высоте CH прямоугольного треугольника BCM.

$$CH = \frac{BC \cdot CM}{BM}.\quad CM = 3;\quad BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = 5.$$





Следовательно, $CH = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = 2,4.$

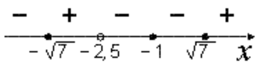
Ответ: 2,4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\dfrac{(2x^2-x-18)^2}{2x+5} \le \dfrac{(3x^2+x-17)^2}{2x+5}$.

Решение:
Перейдем к неравенству:

$$\frac{(2x^2-x-18)^2-(3x^2+x-17)^2}{2x+5} \le 0; \quad \frac{(5x^2-35)(-x^2-2x-1)}{2x+5} \le 0;$$
$$\frac{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x+1)^2}{2x+5} \ge 0$$

Используем метод интервалов: 

.

Ответ: $[-\sqrt{7};\ -2,5),\ -1,\ [\sqrt{7};\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получен ответ, отличающийся от верного ответа только конечным количеством значений переменной	2
Преобразования, в целом, верные. За счет вычислительных ошибок или неверного определения (отсутствия) ограничений получен ответ, включающий в себя верные промежутки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 63, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 20 : 9, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Решение:
Пусть AD – высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O – центр вписанной окружности, P – точка ее касания с боковой стороной AB. Положим $AP = 9x$, $BP = 20x$. Тогда $AB = AP + BP = 29x$, $BD = BP = 20x$.
По теореме Пифагора $AB^2 - BD^2 = AD^2$, откуда

$$(29x)^2-(20x)^2 = 63^2; \quad (21x)^2 = 63^2,$$

значит $x = 3$. Тогда,

$$AP = 9x = 27, \quad BD = 20x = 60, \quad AB = 29x = 87.$$

Обозначим $\angle BAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что $tg\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{20}{21}$.
Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 1), а также основания BC. Тогда D – точка касания, поэтому

$$BF = BD = 60, \quad AF = AB + BF = AB + BD = 87 + 60 = 147.$$

Следовательно,

$$r_1 = O_1F = AFtg\alpha = 147 \cdot \frac{20}{21} = 140.$$

Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD – биссектрисы смежных углов BAK и CAB, значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 63$.
Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB, также равен 63.

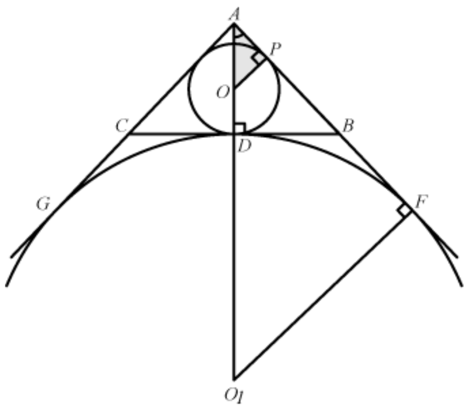


Рис.1

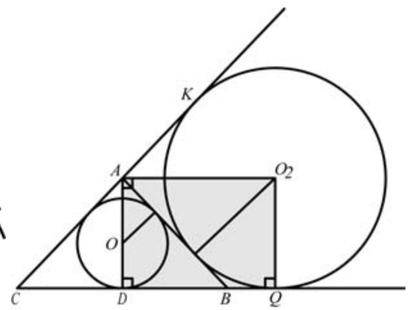


Рис.2

Ответ: 63 или 140

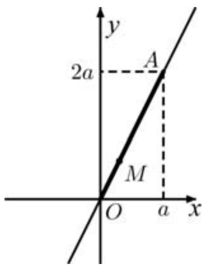
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}=|a|\sqrt{5}, \\ y=ax+a^2-4 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение:



Если $a=0$, то система, очевидно, не имеет решений. Пусть $a\neq 0$, O – начало координат, точка M имеет координаты $(x;y)$ и точка A имеет координаты $(a;2a)$. Тогда $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, $MA=\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}$ и $OA=|a|\sqrt{5}$. Получаем $OM+MA=OA$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке OA.

Отрезок OA имеет более одной общей точки с прямой $y=ax+a^2-4$, только если этот отрезок лежит на прямой. Таким образом, координаты точек A и O должны удовлетворять второму уравнению системы:

$$\begin{cases} 2a=a^2+a^2-4, \\ 0=a^2-4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a=a^2, \\ a^2=4; \end{cases} \quad a=2.$$

Ответ: $a=2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу.	3
Обоснованно найдено значение 2, однако в ответ включены посторонние значения, полученные за счет логической ошибки в рассуждениях.	2
Решение содержит - или верное описание взаимного расположения отрезка и прямой. - или верный переход к уравнениям относительно a или с параметром a относительно одной из переменных, возможно без ограничений на параметр.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Метеоролог вводит в компьютер измерения температуры воздуха. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За все время наблюдений температура наблюдалась выше $20^\circ C$, но ниже $26^\circ C$. Всего метеоролог ввел 22 измерения, но из-за усталости и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой метеоролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую.

После упорядочивания данных получился ряд из 22 чисел, начинающийся числами 21,3; 21,7...

Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся равно 149,53. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 23,28.

Определите, в каких числах и какие ошибки допустил метеоролог.

Решение:

Пусть ряд выглядит так: 21,3; 21,7; x_3; x_4; ... x_{20}; a; b. В результате упорядочивания два числа с ошибками оказались последними. Это числа a и b. Тогда

$$\frac{x_3+x_4+\ldots+x_{20}+a+b}{20}-\frac{21,3+21,7+x_3+x_4+\ldots+x_{20}}{20}=149{,}53–23{,}28=126{,}25,$$

откуда $\frac{a+b}{20}-\frac{21,3+21,7}{20}=126{,}25$ и, значит, $a+b=2525+43=2568$.

Обозначим неизвестные цифры в числах a и b буквами: $a=\overline{2mp}$ и $b=\overline{2n0q}$.

Если $p+q=8$, то $m+0=6$. Тогда $a\geq 260$, что невозможно, поскольку все измерения показывали ниже 26°. Следовательно, $p+q=18$, откуда $p=q=9$.

Тогда $m=5$ и $n=3$. Получаем числа $a=259$ и $b=2309$.

Ответ: метеоролог ошибся в числе 25, 9, пропустив запятую, и в числе 23, 9, поставив вместо запятой ноль.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные значения.	4
Найдена сумма ошибочных чисел, но в вычислениях допущена ошибка, возможно приведшая к неверному ответу.	3
Найдены верные решения, однако доказательство единственности отсутствует или ошибочно.	2
Найдено несколько пар чисел, среди которых есть верное решение, отбор не произведен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4