

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение: $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Решение.

Сделаем замену: $x^2 = t$, получим уравнение: $t^2 - t - 12 = 0$, корнями которого являются числа: -3 ; 4 .

Уравнение $x^2 = 4$ имеет корни: $x = 2, x = -2$.

Уравнение $x^2 = -3$ действительных корней не имеет.

Ответ: -2 ; 2 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения правильный, в результате замены уравнение привели к квадратному, но при этом допущена ошибка в знаке, например, $t = 3$ и $t = -4$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или допущена описка на последнем шаге.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

20 Постройте график функции $y = \frac{4x - x^3}{x + 2}$. При каких значениях x значения функции отрицательны?

Решение.

Область определения функции $y = \frac{4x - x^3}{x + 2}$ все действительные числа, кроме -2 .

Преобразуем дробь: $\frac{x(4 - x^2)}{x + 2} = \frac{x(2 - x)(2 + x)}{x + 2} = x(2 - x) = 2x - x^2$.

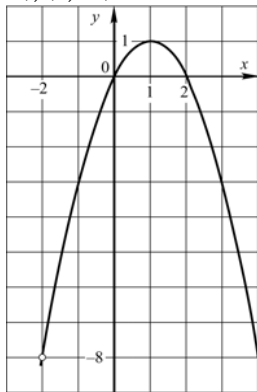
Нужно построить график функции $y = 2x - x^2$, где $x \neq -2$.

Ее графиком является парабола без точки с абсциссой, равной -2 ;

вершина параболы: $(1; 1)$;

точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(2; 0)$;

дополнительные точки: $(3; -3)$, $(-1; -3)$, $(4; -8)$.



По графику: $y < 0$ на промежутках $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Верно найдена область определения, построена парабола, но при построении не учитывалась область определения. Или: ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описка. Или: из промежутков не исключили -2 .
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

21 Беллетрист хочет набрать на компьютере рукопись объемом 420 страниц. Если он будет набирать на 7 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать беллетрист?

Решение.

Пусть x (стр./день) – плановый набор страниц рукописи, тогда $\frac{420}{x}$ (дней) – плановое время набора рукописи.

Если он будет набирать на 7 страниц в день больше, чем запланировал, т.е. $x + 7$ (стр./день), то время набора $\frac{420}{x + 7}$ (дней).

Работу беллетрист закончит на 2 дня раньше, т.е. $\frac{420}{x} - \frac{420}{x + 7} = 2$.

$x^2 + 7x - 210 \cdot 7 = 0$, откуда: $x = -42, x = 35$.

Условие задачи удовлетворяет только второй корень.

35 страниц в день планирует набирать беллетрист.

Ответ: 35.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

22 Вычислите: $\frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^6}$.

Решение.

В числителе записана сумма геометрической прогрессии:

$1, 3, 3^2, \dots, 3^{13}$, где $b_1 = 1, q = 3, n = 14$. Эта сумма равна:

$$S_{14} = \frac{b_1(q^{14} - 1)}{q - 1} = \frac{1(3^{14} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{14} - 1}{2}$$

В знаменателе тоже записана сумма геометрической прогрессии: $1, 3, 3^2, \dots, 3^6$, где $b_1 = 1, q = 3, n = 7$.

Эта сумма равна:

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{1(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^7 - 1}{2}.$$

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{(3^{14} - 1) \cdot 2}{2 \cdot (3 - 1)} = \frac{(3^7)^2 - 1}{3^7 - 1} = \frac{(3^7 - 1) \cdot (3^7 + 1)}{3^7 - 1} = 3^7 + 1 = 2188.$$

Задание можно решить, используя способ группировки и вынесения общего множителя.

Ответ: 2188.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

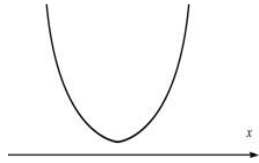
23 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$ не имеет решений?

Решение.

1) Пусть $a = 0$, тогда $0x^2 + 0x + 5 \leq 0$. Получаем $5 \leq 0$ – это неверно. Значит, при $a = 0$ неравенство решений не имеет.

2) При $a \neq 0$ исходное неравенство будет квадратным и графиком функции $y = ax^2 + 4ax + 5$ является парабола.

Чтобы неравенство не имело решений, надо, чтобы парабола была расположена выше оси абсцисс.



Запишем условие, соответствующее данному положению параболы: $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$$D = 16a^2 - 20a.$$

Решением неравенства $16a^2 - 20a < 0$ ($D < 0$) является промежуток $(0; 1,25)$.

Решением системы: $\begin{cases} a > 0, \\ 0 < a < 1,25 \end{cases}$ является промежуток $(0; 1,25)$.

Объединяя два случая получаем: при $a \in [0; 1,25)$ неравенство не имеет решений.

Ответ: при $a \in [0; 1,25)$ неравенство не имеет решений

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена вычислительная ошибка. Или: не включили в ответ 0.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

19 Решите уравнение: $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

Решение.

Сделаем замену: $x^2 = t$, получим уравнение: $t^2 - 26t + 25 = 0$, корнями которого являются числа: 1; 25.

Уравнение $x^2 = 1$ имеет корни: $x = 1, x = -1$.

Уравнение $x^2 = 25$ имеет корни: $x = 5, x = -5$.

Ответ: -5; -1; 1; 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения правильный, в результате замены уравнение привели к квадратному, но при этом допущена ошибка в знаке, например, $t = 25$ и $t = -1$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или: допущена описка на последнем шаге.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

20 Постройте график функции $y = \frac{4x - x^3}{x - 2}$. При каких значениях x значения функции отрицательны?

Решение.

Область определения функции $y = \frac{4x - x^3}{x - 2}$ все действительные числа, кроме 2.

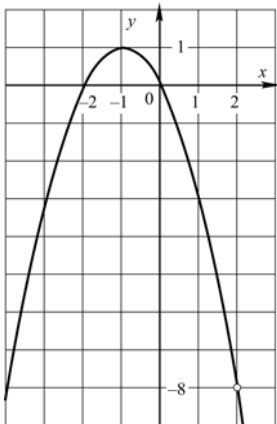
Преобразуем дробь: $\frac{x(4 - x^2)}{x - 2} = \frac{x(2 - x)(2 + x)}{x - 2} = -x(2 + x) = -x^2 - 2x$.

Нужно построить график функции $y = -x^2 - 2x$, где $x \neq 2$.

Ее графиком является парабола без точки с абсциссой, равной 2;

вершина параболы: (-1; 1);

точки пересечения с осями координат: (0; 0), (-2; 0);



По графику: $y < 0$ на промежутках $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Верно найдена область определения, построена парабола, но при построении не учитывалась область определения. Или: ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка или описки. Или: из промежутков не исключили 2.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

21 Расстояние по реке между двумя деревнями равно 4 км. На путь туда и обратно моторная лодка затратила 44 минуты. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч? Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть x (км/ч) – собственная скорость лодки, тогда $\frac{4}{x - 1}$ (ч) – время движения против течения реки и $\frac{4}{x + 1}$ (ч) – время движения по течению реки.

На путь туда и обратно лодка затратила 44 минуты, составим уравнение $\frac{4}{x - 1} + \frac{4}{x + 1} = \frac{44}{60}$.

$11x^2 - 120x - 11 = 0$, откуда: $x = -\frac{1}{11}$, $x = 11$.

Условию задачи удовлетворяет только второй корень.

11 км/ч – собственная скорость лодки.

Ответ: 11.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

22 Вычислите: $\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{17}}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8}$.

Решение.

В числителе записана сумма геометрической прогрессии: $1, 2, 2^2, \dots, 2^{17}$, где $b_1 = 1, q = 2, n = 18$. Эта сумма равна:

$$S_{18} = \frac{b_1(q^{18} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{18} - 1)}{2 - 1} = 2^{18} - 1.$$

В знаменателе тоже записана сумма геометрической прогрессии: $1, 2, 2^2, \dots, 2^8$, где $b_1 = 1, q = 2, n = 9$. Эта сумма равна:

$$S_9 = \frac{b_1(q^9 - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^9 - 1)}{2 - 1} = 2^9 - 1.$$

$$\frac{S_{18}}{S_9} = \frac{2^{18} - 1}{2^9 - 1} = \frac{(2^9)^2 - 1}{2^9 - 1} = \frac{(2^9 - 1) \cdot (2^9 + 1)}{2^9 - 1} = 2^9 + 1 = 513.$$

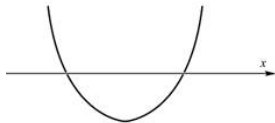
Ответ: 513.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

23 При каких значениях параметра p решением неравенства $x^2 - (2p + 2)x + 3p + 7 \leq 0$ является промежуток, длина которого равна 1?

Решение.

Исходное неравенство будет квадратным и графиком функции $y = x^2 - (2p + 2)x + 3p + 7$ является парабола.



Чтобы неравенство имело решение надо, чтобы парабола пересекала ось абсцисс, в этом случае решением будет являться промежуток.

$$D = (-(2p + 2))^2 - 4(3p + 7) = 4p^2 + 8p + 4 - 12p - 28 = 4p^2 - 4p - 24$$

Решением неравенства $4p^2 - 4p - 24 > 0$ ($D > 0$), $p^2 - p - 6 > 0$ является промежуток $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Длина промежутка равна:

$$x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a} = 2\sqrt{p^2 - p - 6} = 1.$$

Имеем уравнение $4p^2 - 4p - 24 = 1$, корнями которого являются: $\frac{1 - \sqrt{26}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{26}}{2}$.

Ответ: при $p = \frac{1 - \sqrt{26}}{2}$ и при $p = \frac{1 + \sqrt{26}}{2}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.