

Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.
 Без производной

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Вариант 13, 15

С1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или

$\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -1; \text{ тогда } y + 1 = 0.$$

что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.

3. Если $\sin x = -1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -7; \text{ тогда } y + 1 < 0. \text{ Это невозможно.}$$

4. Если $\sin x = 1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = 1, \text{ тогда } y + 1 > 0,$$

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 1.$

Критерии:

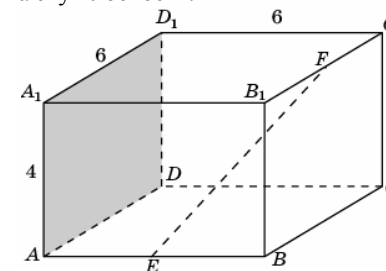
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

Решение.

Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани $BB_1 C_1 C$. Точка B - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\text{tg} \angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3

Решите неравенство

$$\log_x (7-x) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) - \log_x (x-1).$$

Решение.

$$\log_x (7-x) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) - \log_x (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x (7-x)(x-1) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (7-x) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x < 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0) \\ 1 < x < 7 \end{cases}$$

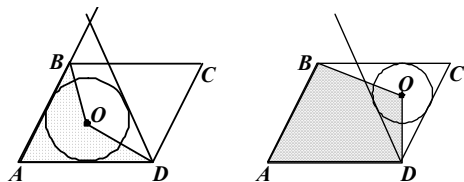
Ответ: $1 < x < 2, 3 < x < 7$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемые выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2, BC = 3, \angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x - ax - a \geq 0, \\ x - 2 + 2a \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы $(1 - a)x > 8$.

Если $a = 1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a < 1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1-a}$.

Если $a > 1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1-a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)(x - \frac{a}{1-a})(x - 2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a < 1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Если $a > 1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1-a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ \frac{a}{1-a} \geq \frac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \frac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 8, \\ (1-a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи C5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного-двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

C6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m-1), m = 1, \dots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k-1), k = 1, \dots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению
 $5 + 3(m-1) = 9 + 5(k-1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2$.

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому
 $k = 3n - 1, 3m = 15n - 3$,

где $1 \leq n \leq L$.

Найдём L . Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит,

$$\frac{14 + 15L - 1}{2} L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0.$$

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6
Варианты 14, 16

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то

$$y = 4 \sin x + 3 = 1, \text{ тогда } y - 1 = 0, \text{ что невозможно.}$$

3. Если $\sin x = -1$, то

$$y = 4 \sin x + 3 = -1, \text{ тогда } y - 1 < 0, \text{ что невозможно.}$$

4. Если $\sin x = 1$, то

$$y = 4 \sin x + 3 = 7, \text{ тогда } y - 1 > 0,$$

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 7$.

Критерии:

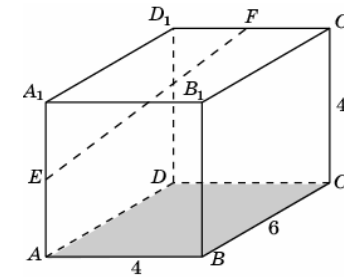
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка A_1 - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1 E = \frac{4}{2} = 2$. $A_1 F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$$\operatorname{tg} \angle EFA_1 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3

Решите неравенство

$$\log_x (5-x) < \log_x (x^3 - 7x^2 + 14x - 5) - \log_x (x-1).$$

Решение.

$$\log_x(5-x) < \log_x(x^3 - 7x^2 + 14x - 5) - \log_x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x(5-x)(x-1) < \log_x(x^3 - 7x^2 + 14x - 5) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5 \\ 1 < x < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) > 0) \\ 1 < x < 5 \end{cases}$$

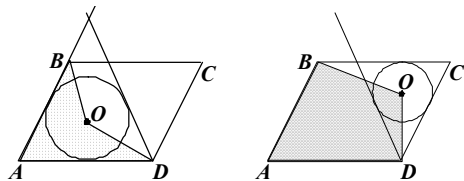
Ответ: $1 < x < 2, 4 < x < 5$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемые выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



правильного треугольника.

Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x - ax - a \geq 0, \\ x - 2 + 2a \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1-a)x > 8.$$

Если $a = 1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a < 1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1-a}$.

Если $a > 1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1-a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)(x - \frac{a}{1-a})(x - 2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a < 1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Если $a > 1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$\frac{a}{1-a}, 2(1-a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1-a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ \frac{a}{1-a} \geq \frac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \frac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq a \leq 8, \\ (1-a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3$$

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи C5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

C6

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5, a_2 = 8, \dots, a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9, b_2 = 14, \dots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m-1), m = 1, \dots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k-1), k = 1, \dots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению

$$5 + 3(m-1) = 9 + 5(k-1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому

$$k = 3n - 1, 3m = 15n - 3,$$

где $1 \leq n \leq L$.

Найдём L . Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит,

$$\frac{14 + 15L - 1}{2} L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0.$$

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49$.

Ответ: 49 и 29.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0