

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0, \\ \sqrt{\sin x} \sqrt{2 - y - y^2} = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из неравенства $6x - x^2 + 8 \geq 0$ получаем: $2 \leq x \leq 4$.

1 случай. Пусть $x = 2$ или $x = 4$. Если $x = 4$, то $\sin x < 0$; если $x = 2$, то $\sin x > 0$. Из второго уравнения получаем: $2 - y - y^2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = 1$.

Если $y = -2$, то $\cos y < 0$. Если $y = 1$, то $\cos y > 0$. Значит, $x = 2, y = 1$.

2 случай. Пусть теперь $2 < x < 4$. Тогда $6x - x^2 - 8 > 0$, и поэтому из первого уравнения получаем: $\cos y = 0$.

Учтем, что $2 - y - y^2 \geq 0$. Тогда $-2 \leq y \leq 1$. Из всех решений уравнения $\cos y = 0$ этому условию удовлетворяет только $y = -\frac{\pi}{2}$. При этом $2 - y - y^2 > 0$ и, из второго уравнения получаем: $\sin x = 0$. Из всех решений этого уравнения интервалу $2 < x < 4$ принадлежит только $x = \pi$. Значит $x = \pi, y = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $(2; 1), (\pi; -\frac{\pi}{2})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

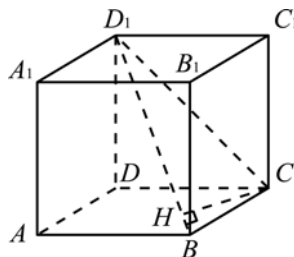
C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

Решение.

Проведем отрезок CD_1 и опустим перпендикуляр CH на BD_1 . Искомое расстояние равно высоте CH прямоугольного треугольника BCD_1 с прямым углом C :

$$CH = \frac{CD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$.

Решение.

Так как $0 < 7^{-|x-3|} \leq 1$ и $\log_2(6x - x^2 - 7) = \log_2(2 - (x-3)^2) \leq 1$,

переходим к системе

$$\begin{cases} \log_2(2 - (x-3)^2) = 1, \\ 7^{-|x-3|} = 1. \end{cases}$$

Получаем: $x = 3$

Ответ: $x = 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Не сделана оценка $7^{- x-3 } > 0$ или не рассмотрен случай отрицательных множителей. Ответ верный	2
Получен верный ответ равносильными преобразованиями или с помощью оценок, но не доказано отсутствие других решений. Или при верном ходе решения ответ неверный, или отсутствует за счет вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Решение.

Пусть центры окружностей O_1 и O_2 , а точки касания A и B . Проведем через точку B прямую, параллельную O_1O_2 . Точку пересечения этой прямой с O_1A обозначим K . Треугольник KAB прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

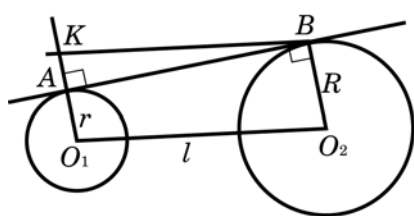


Рис. 1

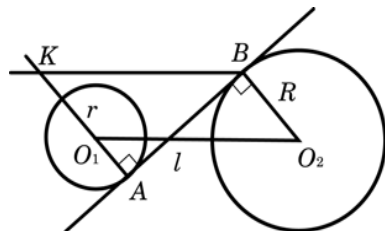


Рис. 2

1. Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
 2. Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).
- Обозначим радиусы окружностей R и r , расстояние между центрами окружностей l . В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$.

Из прямоугольного треугольника KAB находим:

в первом случае $AB = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$,

во втором случае $AB = \sqrt{l^2 - (R + r)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$.

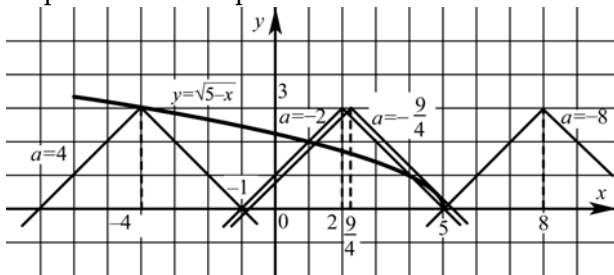
Ответ: 30 или 16.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{5-x} \leq 3 - |x+a|$, и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных a , получаем:

$$-8 < a \leq -\frac{9}{4} \text{ или } -2 < a < 4.$$

Ответ: $\left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup (-2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери или приобретения одного из значений параметра	3
Получен ответ: $-8 < a < 4$ (возможно включение концов). В решении представлена правильная графическая интерпретация или соответствующие ей равносильные преобразования	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра	1
Все ситуации, отличные от описанных выше	0

С6 Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567 \overbrace{888\dots 87654321}^{2000}}{12345678 \overbrace{999\dots 987654321}^{1999}}$$

Решение.

Рассмотрим число $a = \sqrt[2007]{11\dots 1}$ и сложим «в столбик» числа: $a, 10a, 10^2a, \dots, 10^7a$ – получим числитель исходной дроби m ; а складывая числа: $a, 10a, 10^2a, \dots, 10^7a, 10^8a$ – получим знаменатель n , где $m = ap, n = aq$ ($p = 11\ 111\ 111$, $q = 111\ 111\ 111$) и числа p, q – взаимно простые.

Ответ: $\frac{11111111}{111111111}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ верный, но не доказано, что полученная дробь несократима	3
Метод решения правильный, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки	2
Решение дано для дроби с меньшим числом 8 в числителе и 9 в знаменателе и сделан верный, но необоснованный вывод относительно данной дроби	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

C1

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2\cos 2x + 3\sin x = 1, \\ y^2 \cos x + y \cos x + \frac{\sqrt{15}}{2} = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения получаем: $2 - 4\sin^2 x + 3\sin x = 1$, откуда $4\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0$.
Значит, $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{4}$.

Если $\cos x = 0$, то второе уравнение не имеет решений. При $\cos x \neq 0$ рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно y . Дискриминант равен $\cos^2 x - 2\sqrt{15}\cos x = \cos x(\cos x - 2\sqrt{15})$. Чтобы уравнение имело действительные решения, нужно, чтобы дискриминант был неотрицателен. Выражение $\cos x - 2\sqrt{15}$ отрицательно при всех возможных x , значит, $\cos x < 0$.

Следовательно, случай $\sin x = 1$ невозможен, а из $\sin x = -\frac{1}{4}$ находим:
 $x = \pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

При этом $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Второе уравнение принимает вид: $-\frac{\sqrt{15}}{4}y^2 - \frac{\sqrt{15}}{4}y + \frac{\sqrt{15}}{2} = 0$, откуда: $y^2 + y - 2 = 0$. Значит, $y = 1$ или $y = -2$.

Ответ: $(\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k; -2); (\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k; 1), k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2

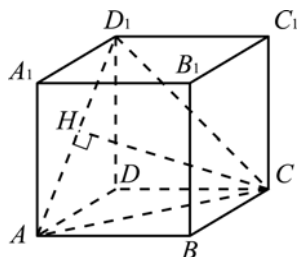
В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой AD_1 .

Решение.

Проведем отрезки CD_1 и AC . Искомое расстояние равно длине перпендикуляра CH , проведенного к прямой AD_1 . Этот перпендикуляр является медианой равностороннего треугольника ACD_1 со стороной $\sqrt{2}$.

$$CH = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3

Решите неравенство $5^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.

Решение.

Так как $0 < 5^{-|x-2|} \leq 1$ и $\log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2(2 - (x-2)^2) \leq 1$,

приходим к системе
$$\begin{cases} \log_2(4x - x^2 - 2) = 1, \\ 5^{-|x-2|} = 1. \end{cases}$$
 Получаем: $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Не сделана оценка $5^{- x-2 } > 0$ или не рассмотрен случай отрицательных множителей. Ответ верный	2
Получен верный ответ равносильными преобразованиями или с помощью оценок, но не доказано отсутствие других решений. Или при верном ходе решения ответ неверный, или отсутствует за счет вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4

Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

Решение.

Пусть центры окружностей O_1 и O_2 , а точки касания A и B . Проведем через точку B прямую, параллельную $O_1 O_2$. Точку пересечения этой прямой с $O_1 A$ обозначим K . Треугольник KAB прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

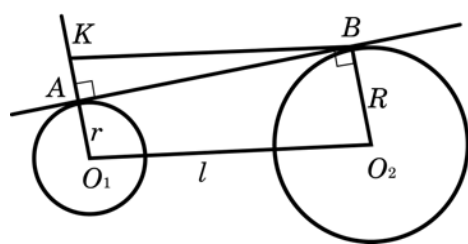


Рис. 1

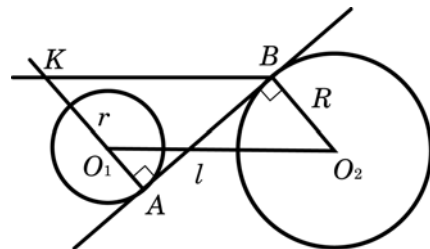


Рис. 2

- Окружности лежат по одну сторону от касательной (рисунок 1).
 - Окружности лежат по разные стороны от касательной (рисунок 2).
- Обозначим радиусы окружностей R и r , расстояния между центрами окружностей l . В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$.

Из прямоугольного треугольника KAB находим:

в первом случае $AB = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$,

во втором случае $AB = \sqrt{l^2 - (R + r)^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14$.

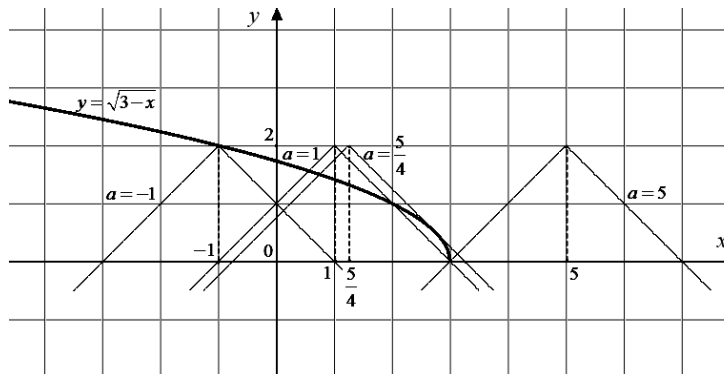
Ответ: 48 или 14.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x} + |x-a| \leq 2$ является отрезок.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3-x} \leq 2 - |x-a|$, и нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Рассматривая взаимное расположение графиков при разных a , получаем: $-1 < a < 1$ или $1,25 \leq a < 5$.

Ответ: $(-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери или приобретения одного из значений параметра	3
Получен ответ: $-1 < a < 5$ (возможно включение концов). В решении представлена правильная графическая интерпретация или соответствующие ей равносильные преобразования	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены промежутки, содержащие правильные значения параметра	1
Все ситуации, отличные от описанных выше	0

С6 Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

Решение.

Тип А: 2 автобуса n – рейсов каждый $m + 7$ – человек в автобусе
 Тип В: 3 автобуса $n - 1$ – рейс m – человек

$$3(n - 1)m = 2n(m + 7)$$

$$3mn - 3m = 2nm + 14n$$

$$mn - 3m = 14n$$

$$m(n - 3) = 14n$$

$$m = \frac{14n}{n-3} = \frac{14(n-3) + 42}{n-3} = 14 + \frac{42}{n-3}, \text{ следовательно надо найти делители } 42.$$

$$n - 3 = 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42.$$

Если $n - 3 = 1$, то получаем $n = 4$, $m = 56$, а всего школьников 504.

$n = 5$, $m = 35$, то школьников 420;

$n = 6$, $m = 28$, то школьников 420;

$n = 9$, $m = 21$, то школьников 504;

$n = 10$, $m = 20$, то школьников 540;

$n = 17$, $m = 17$, то школьников 816;

$n = 45$, $m = 15$, то школьников 1980.

Ответ: 1980.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ, возможно, неверный из-за арифметической ошибки, но правильно обозначена идея перебора, основанная на свойствах делимости	3
Ответ, возможно, неверен, однако есть попытка провести перебор с использованием аналитических соображений	2
Решения ищутся прямым перебором без обоснований и ограничений. Ответ верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0