Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}y = 9, \\ x\,\mathrm{ctg}y = 3. \end{cases}$

Решение.
Умножив и разделив первое уравнение на второе почленно, получим:

$$\begin{cases} x^2 = 27, \\ tg^2y = 3. \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

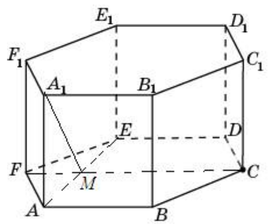
Осталось учесть, что x и y имеют одинаковый знак.

Ответ: $\left(-3\sqrt{3};\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi k\right), \left(3\sqrt{3};\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k\right),\ k \in Z$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что x и $tg\,y$ имеют одинаковый знак.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

Решение.



Искомое расстояние равно расстоянию от прямой A_1B_1 до параллельной ей прямой FC.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1M на прямую FC. Точка M лежит в плоскости AA_1E_1, перпендикулярной прямой FC. Поэтому точка M лежит на пересечении AE и FC, а значит, является серединой AE.

$AE = \sqrt{3}$, $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника A_1AM получаем: $A_1M = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 + 2x^2 + 8x - 7\right| \le x^3 + 4x^2 - 8x + 7.$$

Решение.
$|a| \le b$ тогда и только тогда, когда $-b \le a \le b$. В данном случае получим:

$$\begin{cases} -x^3 - 4x^2 + 8x - 7 \le x^3 + 2x^2 + 8x - 7, \\ x^3 + 2x^2 + 8x - 7 \le x^3 + 4x^2 - 8x + 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 \ge 0, \\ x^2 - 8x + 7 \ge 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $x \ge -3$.

Решение второго неравенства: $x \le 1$ или $x \ge 7$.

Решение системы: $-3 \le x \le 1$; $x \ge 7$.

Ответ: $[-3; 1]$, $[7; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.
Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \ge r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то $AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$, $CD = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

$O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$,

$O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

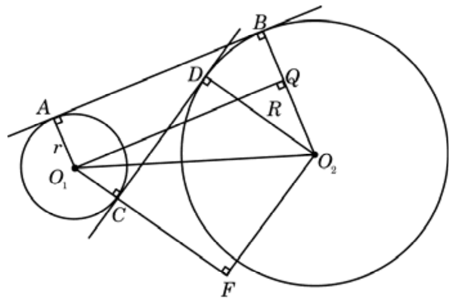


Рис. 1

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр. Заметим, что прямая CD – либо общая внешняя касательная окружностей с центром O и O_2 (рис.2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис.3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

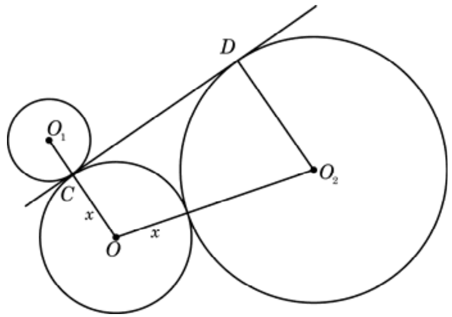


Рис. 2

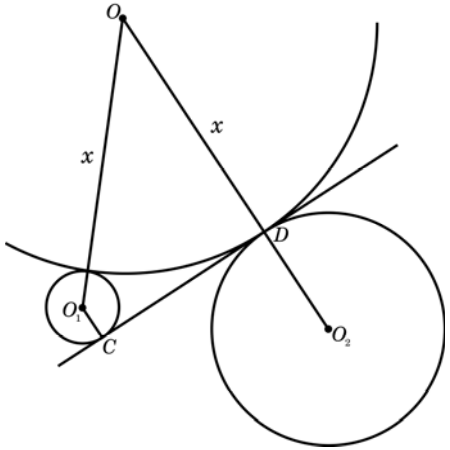


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{17^2 - (9+1)^2} = \sqrt{189}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+9)^2 - (9-x)^2} = 2\sqrt{9x}$, значит, $2\sqrt{9x} = \sqrt{189}$. Следовательно, $x = \dfrac{21}{4}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+1)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$, значит, $2\sqrt{x} = \sqrt{189}$.

Следовательно, $x = \dfrac{189}{4}$.

Ответ: $\dfrac{21}{4}$ или $\dfrac{189}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена при всех $x \in R$. Пусть y – одно из значений данной функции.

Тогда $y\left(6 + x^2\right) = x^2 + 2x - a \Leftrightarrow x^2(y-1) - 2x + a + 6y = 0$ (*).

Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y = 1$ для любого a существует решение уравнения (*):

$$x^2(1-1) - 2x + a + 6 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+6}{2}.$$

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x только, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = 4 - 4(y-1)(6y+a) \geq 0 \Leftrightarrow 6y^2 + (a-6)y - a - 1 \leq 0.$$

Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6 - a - \sqrt{(a+6)^2 + 24}}{12} \leq y \leq \frac{6 - a + \sqrt{(a+6)^2 + 24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6 - a - \sqrt{(a+6)^2 + 24}}{12} \leq y \leq \frac{6 - a + \sqrt{(a+6)^2 + 24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{6 - a - \sqrt{(a+6)^2 + 24}}{12} > 0, \\ \dfrac{6 - a + \sqrt{(a+6)^2 + 24}}{12} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a+6)^2 + 24} < 6 - a, \\ \sqrt{(a+6)^2 + 24} < 18 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a > -11. \end{cases}$$

Ответ: $-11 < a < -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

С6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\begin{matrix} a = a'^2, b = b'^2, c = c'^2; a' < b' < c'; \\ a' \geq 32; b' = a' + t, t \in Z. \end{matrix}$

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2$; $(a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c'$, $q = a' + 2t - c'$; $p - q = 2c'$.

Значит, числа p, q – одинаковой четности, а так как $pq = 2t^2$, то $p = 2n, q = 2m(n, m \in Z) \Rightarrow t = 2v(v \in Z)$.

Значит,

$$\begin{cases} a' + 2t = \dfrac{p+q}{2} = n + m, \\ c' = \dfrac{p-q}{2} = n - m, \\ nm = 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 32, \\ c' = n - m \geq 34, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти минимум $b' = n + m - 2v$.

Так как $n \geq 35, m \geq 1$, то $2v^2 = nm \geq 35 \Rightarrow v \geq 5$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50, n + m \geq 52, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72, n + m \geq 56, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 61$;

3) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98, n + m \geq 60, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 85$;

4) $v = 8 \Rightarrow \begin{cases} nm = 128, n + m \geq 64, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 113, b' = 50$;

5) $v \geq 9 \Rightarrow b' \geq 32 + 2v \geq 32 + 18 = 50$.

Значит, наименьшее значение $b = b'^2 = 2500$, при этом $a = 34^2, c = 62^2$.

Ответ: 2500.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} y\,\mathrm{ctg}x = -9, \\ y\,\mathrm{tg}x = -3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив второе уравнение на первое почленно, получим:

$$\begin{cases} y^2 = 27, \\ tg^2 x = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} y = \pm 3\sqrt{3}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

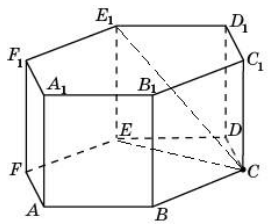
Осталось учесть, что x и y имеют разные знаки.

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ 3\sqrt{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ -3\sqrt{3}\right),\ k \in Z.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $tg\,x$ и y имеют разные знаки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.

Решение.



Проведем отрезок CE_1. Он лежит в плоскости E_1EC, перпендикулярной прямой F_1E_1. Следовательно, F_1E_1 и CE_1 перпендикулярны. Значит, длина CE_1 – искомое расстояние. $EC = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника E_1EC получаем: $CE_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 - 2x^2 - 3x\right| + \left|x^2 + 4x - 5\right| \le \left|x^3 - x^2 + x - 5\right|.$$

Решение.

Заметим, что $x^3 - x^2 + x - 5 = \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) + \left(x^2 + 4x - 5\right)$

Введем обозначения: $a = x^3 - 2x^2 - 3x,\ \ b = x^2 + 4x - 5.$

Неравенство принимает вид $|a| + |b| \le |a+b|$. Но из неравенства треугольника: $|a| + |b| \ge |a+b|$. Значит, $|a| + |b| = |a+b|$.

Последнее равенство возможно, только если оба числа a и b неотрицательны или оба неположительны, то есть если $ab \ge 0$:

$\left(x^3 - 2x^2 - 3x\right)\left(x^2 + 4x - 5\right) \ge 0;\ \ (x+5)(x+1)x(x-1)(x-3) \ge 0.$

Ответ: $[-5; -1],\ [0; 1],\ [3; +\infty).$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \ge r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то

$AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$, $CD = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

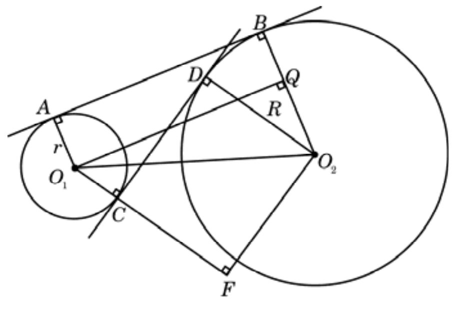


Рис. 1

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

$O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$,

$O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр.

Заметим, что прямая CD – либо общая внешняя касательная окружностей с центром O и O_2 (рис.2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис.3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

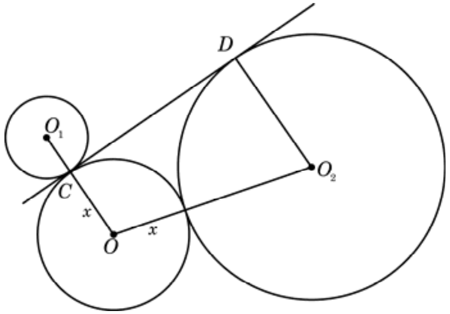


Рис. 2

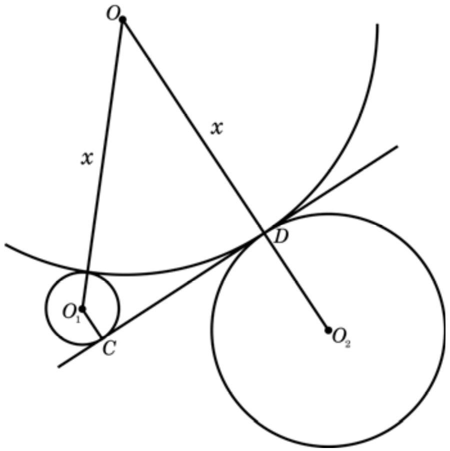


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{15^2 - (8+2)^2} = 5\sqrt{5}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+8)^2 - (8-x)^2} = 4\sqrt{2x}$, значит, $4\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \dfrac{125}{32}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+2)^2 - (2-x)^2} = 2\sqrt{2x}$, значит, $2\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \dfrac{125}{8}$.

Ответ: $\dfrac{125}{32}$ или $\dfrac{125}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена при всех $x \in R$. Пусть y – одно из значений данной функции.

Тогда $y\left(6 + x^2\right) = x^2 - 2x + a \iff x^2(y-1) + 2x - a + 6y = 0$ (*).

Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y = 1$ для любого a существует решение уравнения (*):

$$x^2(1-1) + 2x - a + 6 \cdot 1 = 0 \iff x = \frac{a-6}{2}.$$

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x только, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = 4 - 4(y-1)(6y-a) \geq 0 \iff 6y^2 - (a+6)y + a - 1 \leq 0.$$

Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6 + a - \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} \leq y \leq \frac{6 + a + \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6 + a - \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} \leq y \leq \frac{6 + a + \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{6 + a - \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} > 0 \\ \dfrac{6 + a + \sqrt{(a-6)^2 + 24}}{12} < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{(a-6)^2 + 24} < 6 + a \\ \sqrt{(a-6)^2 + 24} < 18 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a > 1 \\ a < 11. \end{cases}$$

Ответ: $1 < a < 11$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\sqrt{a} = a', \sqrt{b} = b', \sqrt{c} = c'; a' < b' < c';$
$a' \geq 23;\ b' = a' + t, t \in N.$

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2 \iff (a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$. Значит числа p, q – одной четности, а так как $pq = 2t^2$, получаем: $p = 2n, q = 2m\ (n, m \in N) \Rightarrow t = 2v\ (v \in Z)$.

Значит,

$$\begin{cases} a' + 2t = (p+q)/2 = n + m, \\ c' = (p-q)/2 = n - m, \\ nm = 2v^2. \end{cases} \iff \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 23, \\ c' = n - m \geq 25, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти наименьшее значение
$b' = n + m - 2v$.

Так как $n \ge 26, m \ge 1$, находим, что $2v^2 = nm \ge 26$, откуда $v \ge 4$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 4 \Rightarrow \begin{cases} nm = 32, n + m \ge 39, \\ n - m \ge 25, n \ge 26, m \ge 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50, n + m \ge 43, \\ n - m \ge 25, n \ge 26, m \ge 1 \end{cases} \Rightarrow n = 50, n = 1, b' = 41;$

3) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72, n + m \ge 47, \\ n - m \ge 25,\ n \ge 26,\ m \ge 1 \end{cases} \Rightarrow n = 72, m = 1, b' = 61;$

4) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98, n + m \ge 51, \\ n - m \ge 25,\ n \ge 26,\ m \ge 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 37$ или $b' = 85$;

5) $v \ge 8 \Rightarrow b' \ge 23 + 2v \ge 23 + 16 = 39$.

Значит наименьшее значение b равно $37^2 = 1369$, при этом $a = 23^2, c = 47^2$.

Ответ: 1369.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}y = 9, \\ x\,\mathrm{ctg}y = 3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив первое уравнение на второе почленно, получим:

$$\begin{cases} x^2 = 27, \\ tg^2 y = 3. \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

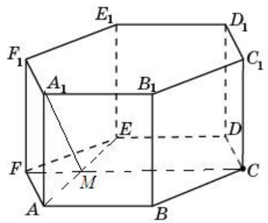
Осталось учесть, что x и y имеют одинаковый знак.

Ответ: $\left(-3\sqrt{3};\ -\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $\left(3\sqrt{3};\ \dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что x и $tg\,y$ имеют одинаковый знак.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.

Решение.



Искомое расстояние равно расстоянию от прямой A_1B_1 до параллельной ей прямой FC.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1M на прямую FC. Точка M лежит в плоскости AA_1E_1, перпендикулярной прямой FC. Поэтому точка M лежит на пересечении AE и FC, а значит, является серединой AE.

$AE = \sqrt{3}$, $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного треугольника A_1AM получаем: $A_1M = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство
$$\left|x^3+2x^2+8x-7\right| \le x^3+4x^2-8x+7.$$

Решение.

$|a| \le b$ тогда и только тогда, когда $-b \le a \le b$. В данном случае получим:

$$\begin{cases} -x^3-4x^2+8x-7 \le x^3+2x^2+8x-7, \\ x^3+2x^2+8x-7 \le x^3+4x^2-8x+7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3+3x^2 \ge 0, \\ x^2-8x+7 \ge 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $x \ge -3$.

Решение второго неравенства: $x \le 1$ или $x \ge 7$.

Решение системы: $-3 \le x \le 1$; $x \ge 7$.

Ответ: $[-3; 1]$, $[7; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \ge r+R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то $AB = \sqrt{a^2-(R-r)^2}$, $CD = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

$O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2-(R-r)^2}$,

$O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

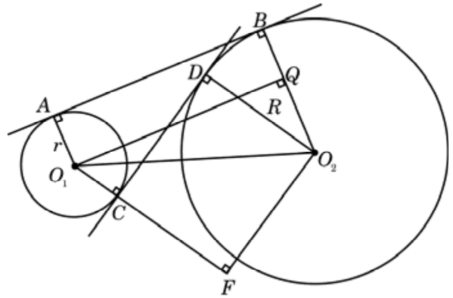


Рис. 1

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр. Заметим, что прямая CD – либо общая внешняя касательная окружностей с центром O и O_2 (рис.2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис.3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

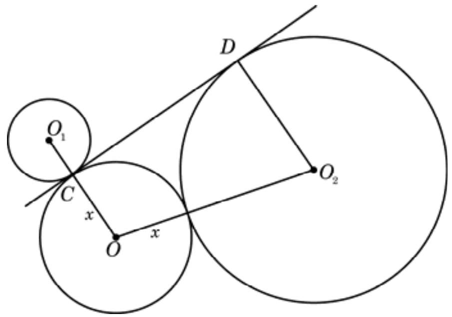


Рис. 2

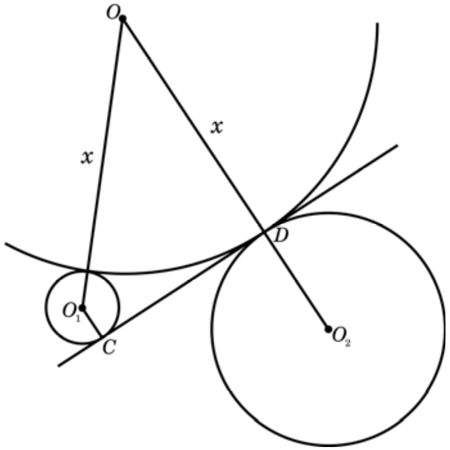


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{17^2 - (9+1)^2} = \sqrt{189}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+9)^2 - (9-x)^2} = 2\sqrt{9x}$, значит, $2\sqrt{9x} = \sqrt{189}$. Следовательно, $x = \dfrac{21}{4}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+1)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$, значит, $2\sqrt{x} = \sqrt{189}$.

Следовательно, $x = \dfrac{189}{4}$.

Ответ: $\dfrac{21}{4}$ или $\dfrac{189}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \dfrac{x^2+2x-a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена при всех $x \in R$. Пусть y – одно из значений данной функции.

Тогда $y\left(6+x^2\right) = x^2+2x-a \iff x^2(y-1) - 2x + a + 6y = 0$ (*).

Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y = 1$ для любого a существует решение уравнения (*):

$$x^2(1-1) - 2x + a + 6\cdot 1 = 0 \iff x = \frac{a+6}{2}.$$

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x только, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = 4 - 4(y-1)(6y+a) \geq 0 \iff 6y^2 + (a-6)y - a - 1 \leq 0.$$

Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{6-a-\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} > 0, \\ \dfrac{6-a+\sqrt{(a+6)^2+24}}{12} < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{(a+6)^2+24} < 6-a, \\ \sqrt{(a+6)^2+24} < 18+a \end{cases} \iff \begin{cases} a < -1, \\ a > -11. \end{cases}$$

Ответ: $-11 < a < -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $a = a'^2, b = b'^2, c = c'^2; a' < b' < c';$
$a' \geq 32; b' = a' + t, t \in Z.$

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2;$ $(a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$.

Значит, числа p, q – одинаковой четности, а так как $pq = 2t^2$, то $p = 2n, q = 2m(n, m \in Z) \Rightarrow t = 2v(v \in Z)$.

Значит,

$$\begin{cases} a' + 2t = \dfrac{p+q}{2} = n + m, \\ c' = \dfrac{p-q}{2} = n - m, \\ nm = 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 32, \\ c' = n - m \geq 34, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти минимум
$b' = n + m - 2v$.

Так как $n \geq 35, m \geq 1$, то $2v^2 = nm \geq 35 \Rightarrow v \geq 5$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50, n + m \geq 52, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72, n + m \geq 56, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 61$;

3) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98, n + m \geq 60, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 85$;

4) $v = 8 \Rightarrow \begin{cases} nm = 128, n + m \geq 64, \\ n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 113, b' = 50$;

5) $v \geq 9 \Rightarrow b' \geq 32 + 2v \geq 32 + 18 = 50$.

Значит, наименьшее значение $b = b'^2 = 2500$, при этом $a = 34^2, c = 62^2$.

Ответ: 2500.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений $\begin{cases} y\operatorname{ctg}x = -9, \\ y\operatorname{tg}x = -3. \end{cases}$

Решение.

Умножив и разделив второе уравнение на первое почленно, получим:

$$\begin{cases} y^2 = 27, \\ tg^2 x = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} y = \pm 3\sqrt{3}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

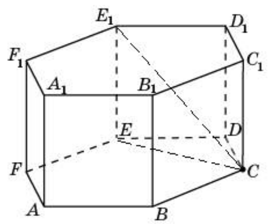
Осталось учесть, что x и y имеют разные знаки.

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ 3\sqrt{3}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ -3\sqrt{3}\right)$, $k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $tg\,x$ и y имеют разные знаки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.

Решение.



Проведем отрезок CE_1. Он лежит в плоскости E_1EC, перпендикулярной прямой F_1E_1. Следовательно, F_1E_1 и CE_1 перпендикулярны. Значит, длина CE_1 – искомое расстояние. $EC = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника E_1EC получаем: $CE_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 - 2x^2 - 3x\right| + \left|x^2 + 4x - 5\right| \le \left|x^3 - x^2 + x - 5\right|.$$

Решение.

Заметим, что $x^3 - x^2 + x - 5 = \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) + \left(x^2 + 4x - 5\right)$

Введем обозначения: $a = x^3 - 2x^2 - 3x$, $b = x^2 + 4x - 5$.

Неравенство принимает вид $|a| + |b| \le |a + b|$. Но из неравенства треугольника: $|a| + |b| \ge |a + b|$. Значит, $|a| + |b| = |a + b|$.

Последнее равенство возможно, только если оба числа a и b неотрицательны или оба неположительны, то есть если $ab \ge 0$:

$\left(x^3 - 2x^2 - 3x\right)\left(x^2 + 4x - 5\right) \ge 0$; $(x+5)(x+1)x(x-1)(x-3) \ge 0$.

Ответ: $[-5; -1]$, $[0; 1]$, $[3; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \ge r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя – в точках C и D, то

$AB = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$, $CD = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис.1). Из точки O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2 - QO_2} = \sqrt{a^2 - (R - r)^2},$$

$$O_2F = \sqrt{O_1O_2 - FO_1} = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}.$$

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

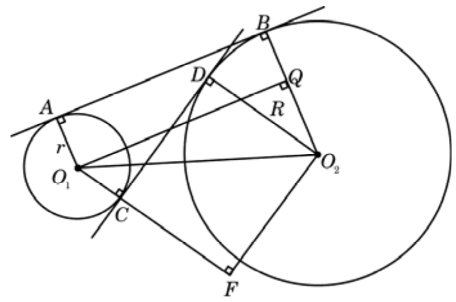


Рис. 1

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр.

Заметим, что прямая CD – либо общая внешняя касательная окружностей с центром O и O_2 (рис.2), либо окружностей с центрами O и O_1 (рис.3). В первом из этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором – в точке D.

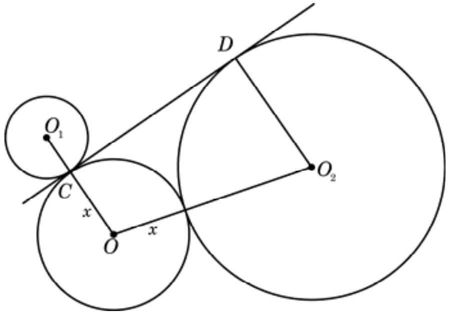


Рис. 2

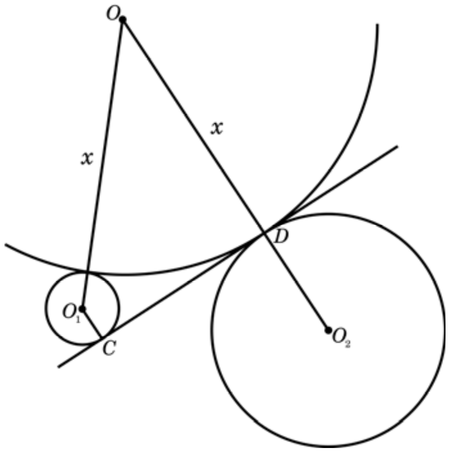


Рис. 3

По доказанному $CD = \sqrt{15^2 - (8+2)^2} = 5\sqrt{5}$.

В первом случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+8)^2 - (8-x)^2} = 4\sqrt{2x}$, значит, $4\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \frac{125}{32}$.

Во втором случае CD – общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+2)^2 - (2-x)^2} = 2\sqrt{2x}$, значит, $2\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$. Следовательно, $x = \frac{125}{8}$.

Ответ: $\frac{125}{32}$ или $\frac{125}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

1) Функция определена при всех $x \in R$. Пусть y – одно из значений данной функции.

Тогда $y\left(6+x^2\right) = x^2 - 2x + a \iff x^2(y-1) + 2x - a + 6y = 0$ (*).

Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, поскольку при $y = 1$ для любого a существует решение уравнения (*):

$$x^2(1-1) + 2x - a + 6 \cdot 1 = 0 \iff x = \frac{a-6}{2}.$$

2) Пусть $y \neq 1$ и a – некоторые числа. Тогда уравнение (*) разрешимо относительно x только, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = 4 - 4(y-1)(6y-a) \geq 0 \iff 6y^2 - (a+6)y + a - 1 \leq 0.$$

Полученное неравенство при любом a равносильно неравенству

$$\frac{6+a-\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6+a+\sqrt{(a-6)^2+24}}{12}.$$

Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{6+a-\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} \leq y \leq \frac{6+a+\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} < 2.$$

3) Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{6+a-\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} > 0 \\ \frac{6+a+\sqrt{(a-6)^2+24}}{12} < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{(a-6)^2+24} < 6+a \\ \sqrt{(a-6)^2+24} < 18-a \end{cases} \iff \begin{cases} a > 1 \\ a < 11. \end{cases}$$

Ответ: $1 < a < 11$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде отрезка или полуинтервала (приобретены граничные значения).	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или правильный переход к уравнению относительно y.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдена хотя бы часть решений.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\sqrt{a} = a', \sqrt{b} = b', \sqrt{c} = c'; a' < b' < c';$
$a' \geq 23;\ b' = a' + t, t \in N.$

Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2 \iff (a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$.

Положим $p = a' + 2t + c', q = a' + 2t - c'; p - q = 2c'$. Значит числа p, q – одной четности, а так как $pq = 2t^2$, получаем: $p = 2n, q = 2m$ $(n, m \in N) \Rightarrow t = 2v$ $(v \in Z)$.

Значит,

$$\begin{cases} a' + 2t = (p+q)/2 = n + m, \\ c' = (p-q)/2 = n - m, \\ nm = 2v^2. \end{cases} \iff \begin{cases} a' = n + m - 4v \geq 23, \\ c' = n - m \geq 25, \\ nm = 2v^2. \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти наименьшее значение
$b' = n + m - 2v$.

Так как $n \geq 26, m \geq 1$, находим, что $2v^2 = nm \geq 26$, откуда $v \geq 4$.

Далее перебираем случаи:

1) $v = 4 \Rightarrow \begin{cases} nm = 32, n + m \geq 39, \\ n - m \geq 25, n \geq 26, m \geq 1. \end{cases}$ решений нет;

2) $v = 5 \Rightarrow \begin{cases} nm = 50, n + m \geq 43, \\ n - m \geq 25, n \geq 26, m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow n = 50, n = 1, b' = 41;$

3) $v = 6 \Rightarrow \begin{cases} nm = 72, n + m \geq 47, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow n = 72, m = 1, b' = 61;$

4) $v = 7 \Rightarrow \begin{cases} nm = 98, n + m \geq 51, \\ n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow b' = 37$ или $b' = 85;$

5) $v \geq 8 \Rightarrow b' \geq 23 + 2v \geq 23 + 16 = 39$.

Значит наименьшее значение b равно $37^2 = 1369$, при этом $a = 23^2, c = 47^2$.

Ответ: 1369.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = x, \\ \sin y^2 = \cos x. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $x \ge 0$, а второе уравнение принимает вид $\sin x = \cos x$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $x \ge 0$, получаем: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда $y = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi k}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $x \ge 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

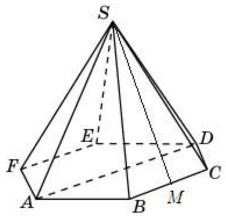
Решение.

Прямая AD параллельна прямой BC. Следовательно, искомый угол SBC.

В равнобедренном треугольнике SBC проведем медиану и высоту SM.

$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$.

Из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM = \frac{BM}{SB} = \frac{1}{4}$.



Ответ: $\frac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 + 2x^2 - 8x\right| + \left|x^2 - 3x - 10\right| \le \left|x^3 + 3x^2 - 11x - 10\right|.$$

Решение.

Заметим, что $x^3 + 3x^2 - 11x - 10 = (x^3 + 2x^2 - 8x) + (x^2 - 3x - 10)$.

Введем обозначения: $a = x^3 + 2x^2 - 8x$, $b = x^2 - 3x - 10$.

Неравенство принимает вид $|a| + |b| \le |a + b|$. Но из неравенства треугольника: $|a| + |b| \ge |a + b|$.

Значит, $|a| + |b| = |a + b|$.

Последнее равенство возможно, только если оба числа a и b неотрицательны или оба неположительны, то есть если $ab \ge 0$:

$(x^3 + 2x^2 - 8x)(x^2 - 3x - 10) \ge 0$; $(x+4)(x+2)x(x-2)(x-5) \ge 0$.

Ответ: $[-4; -2]$, $[0; 2]$, $[5; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

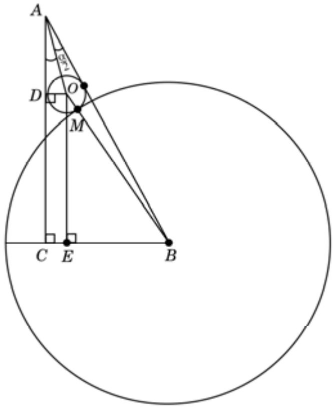
$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12},\ \cos\alpha = \frac{12}{13},\ \sin\alpha = \frac{5}{13}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD ctg\frac{\alpha}{2} = 5x.$$



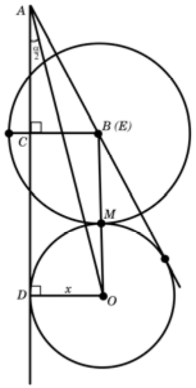


Рис. 1 Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 8 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x$, $BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x$,

причем $AD < AC$, т. е. $5x < 12$, $x < \dfrac{12}{5}$. По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$(8 + x)^2 = (12 - 5x)^2 + (5 - x)^2$, $25x^2 - 146x + 105 = 0$, $x < \dfrac{12}{5}$,

откуда находим, что $x = \dfrac{21}{25}$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому $OE = CD = AD - AC = 5x - 12$, причем $AD > AC$, т. е. $x > \dfrac{12}{5}$.

Тогда $(8 + x)^2 = (5x - 12)^2 + (5 - x)^2$; $25x^2 - 146x + 105 = 0$; $x > \dfrac{12}{5}$,

откуда находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

***Ответ*:** $\dfrac{21}{25}$ или 5.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x - 3a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x + 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных решений.

***Решение*.**

Преобразуем уравнение: $\sin(x - 3a) = -\left(x^2 - 4x + a\right) - \sin\left(\dfrac{x^2 - 6x + a}{2} + 3a\right)$;

$2x + \sin(x - 3a) = -(x^2 - 6x + a) - \sin\left(\dfrac{x^2 - 6x + a}{2} + 3a\right)$.

Обозначим $y = -\dfrac{x^2 - 6x + a}{2}$.

Уравнение принимает вид $2x + \sin(x - 3a) = 2y - \sin(-y + 3a)$.

Синус – функция нечетная, поэтому $2x + \sin(x - 3a) = 2y + \sin(y - 3a)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + \sin(t - 3a)$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Эта функция определена при всех t и ее производная равна $f'(t) = 2 + \cos(t - 3a) > 0$ при всех t.

Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $x = -\dfrac{x^2 - 6x + a}{2}$; $x^2 - 6x + a = -2x$; $x^2 - 4x + a = 0$.

Уравнение не имеет действительных решений, если дискриминант его отрицателен:

$4^2 - 4a < 0$; $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые привели к неверному ответу при верных рассуждениях.	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или обоснованно получено, что $x = y$.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но сделан переход к равенству $x = y$, хотя без обоснования.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем: $3nx = 2(n+3)(x+2)$,

откуда $3nx = 2(n+3)(x+2)$, $n = \dfrac{6x+12}{x-4} = 6 + \dfrac{36}{x-4} = 6\left(1+\dfrac{6}{x-4}\right)$.

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\dfrac{6}{x-4} > -1$, откуда $x > 4$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ – натуральный делитель числа 36.

Количество шариков при этом $f(x) = 3nx = 18\left(x+\dfrac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x+\dfrac{24}{x-4}\right) + 108$.

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 840.

Комментарий. Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция $y = x + \dfrac{24}{x-4}$ монотонно убывает при $4 < x \le 4+2\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \ge 4+2\sqrt{6}$.

Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x-4$ – наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если $x-4=1$, то $x=5$, $f(5) = 18(5+24)+108 = 630$.

Если $x-4=36$, то $x=40$, $f(40) = 18\left(40+\dfrac{2}{3}\right)+108 = 840$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = y, \\ \cos x^2 = -\sin y. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $y \ge 0$, а второе уравнение принимает вид $\cos y = -\sin y$, откуда $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $y \ge 0$, получаем: $k = 1, 2, \ldots$

Тогда $x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k}$.

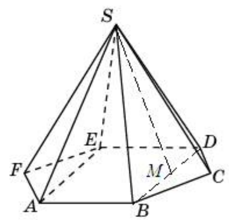
Ответ: $\left(-\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k};\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\right), \left(\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k};\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k = 1, 2, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $y \ge 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

Решение.

Искомый угол равен углу между прямыми SB и BD, поскольку $BD \parallel AE$. В равнобедренном треугольнике BSD проведем высоту и медиану SM.



$BM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника SMB получаем:

$\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 + 3x^2 + 10x - 9\right| \le x^3 + 5x^2 - 10x + 9.$$

Решение.

$|a| \le b$ тогда и только тогда, когда $-b \le a \le b$. В данном случае получим:

$$\begin{cases} -x^3 - 5x^2 + 10x - 9 \le x^3 + 3x^2 + 10x - 9, \\ x^3 + 3x^2 + 10x - 9 \le x^3 + 5x^2 - 10x + 9. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + 4x^2 \ge 0, \\ x^2 - 10x + 9 \ge 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $x \ge -4$.

Решение второго неравенства: $x \le 1$ или $x \ge 9$.

Решение системы: $-4 \le x \le 1$; $x \ge 9$.

Ответ: $[-4; 1]$, $[9; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 36$ и $BC = 27$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 18. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = ODctg\frac{\alpha}{2} = 3x.$$

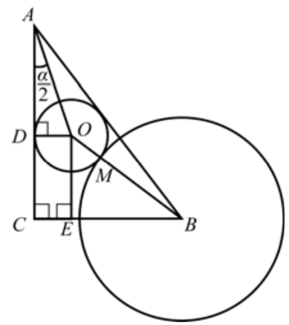


Рис. 1

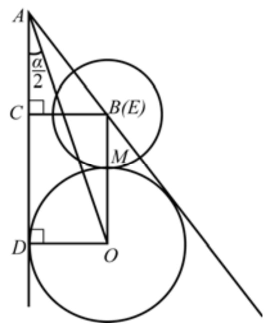


Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 18 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$OE = CD = AC - AD = 36 - 3x, \quad BE = BC - CE = BC - OD = 27 - x,$

причем $AD < AC$, т. е. $3x < 36$, $\quad x < 12$. По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$(18+x)^2 = (36-3x)^2 + (27-x)^2, \quad x^2 - 34x + 189 = 0, \quad x < 12,$

откуда находим, что $x = 7$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому $OE = CD = AD - AC = 3x - 36$, причем $AD > AC$, т. е. $x > 12$. Тогда

$(18+x)^2 = (3x-36)^2 + (27-x)^2, \quad x^2 - 34x + 189 = 0, \quad x > 12,$

откуда находим, что $x = 27$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: 7 или 27.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем уравнение: $\cos\left(\dfrac{-2x^2 + 10x + 2a}{3} - a\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a;$

$$3x - \cos(2x + a) = x^2 - 5x - a - \cos\left(\frac{-2(x^2 - 5x - a)}{3} - a\right).$$

Обозначим $y = \dfrac{x^2 - 5x - a}{3}$.

Уравнение принимает вид $3x - \cos(2x + a) = 3y - \cos(-2y - a)$.

Косинус – функция четная, поэтому $3x - \cos(2x + a) = 3y - \cos(2y + a)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 3t - \cos(2t + a)$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Эта функция определена при всех t и ее производная равна $f'(t) = 3 + 2\sin(2t + a) > 0$ при всех t.

Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $x = \dfrac{x^2 - 5x - a}{3}$; $\; x^2 - 5x - a = 3x$; $\; x^2 - 8x - a = 0$.

Уравнение имеет единственное решение, если дискриминант его равен нулю:

$8^2 + 4a = 0; \quad a = -16.$

Ответ: -16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде промежутка.	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или обоснованно получено, что $x = y$.	2
Ответ возможно, отсутствует или неверен, но сделан переход к $x = y$, хотя без обоснования.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит два пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x - 2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакетике $n - 5$. По условию задачи получаем: $2nx = 3(n - 5)(x - 2)$, откуда

$$n = \frac{15x - 30}{x - 6} = 15 + \frac{60}{x - 6} = 15\left(1 + \frac{4}{x - 6}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\dfrac{4}{x - 6} > -1$, откуда $x > 6$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x - 6$ – натуральный делитель числа 60.

Количество шариков при этом

$$f(x) = 2nx = 2x\left(15 + \frac{60}{x - 6}\right) = 30\left(x + \frac{4x}{x - 6}\right) = 30\left(x + \frac{24}{x - 6}\right) + 120.$$

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 2112.

Комментарий. Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция $y = x + \dfrac{24}{x - 6}$ монотонно убывает при $6 < x \le 6 + 2\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \ge 6 + 2\sqrt{6}$.

Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x - 6$ – наибольший или наименьший натуральный делитель числа 60.

Если $x - 6 = 1$, то $x = 7$, $\; f(7) = 30(7 + 24) + 120 = 1050$.

Если $x - 6 = 60$, то $x = 66$, $\; f(66) = 30\left(66 + \dfrac{2}{5}\right) + 120 = 2112$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = x, \\ \sin y^2 = \cos x. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $x \ge 0$, а второе уравнение принимает вид $\sin x = \cos x$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $x \ge 0$, получаем: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда $y = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi k}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $x \ge 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AD.

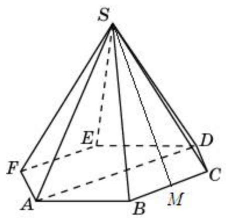
Решение.

Прямая AD параллельна прямой BC. Следовательно, искомый угол SBC.

В равнобедренном треугольнике SBC проведем медиану и высоту SM.

$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$.

Из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM = \frac{BM}{SB} = \frac{1}{4}$.



Ответ: $\frac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 + 2x^2 - 8x\right| + \left|x^2 - 3x - 10\right| \le \left|x^3 + 3x^2 - 11x - 10\right|.$$

Решение.

Заметим, что $x^3 + 3x^2 - 11x - 10 = (x^3 + 2x^2 - 8x) + (x^2 - 3x - 10)$.

Введем обозначения: $a = x^3 + 2x^2 - 8x$, $b = x^2 - 3x - 10$.

Неравенство принимает вид $|a| + |b| \le |a + b|$. Но из неравенства треугольника: $|a| + |b| \ge |a + b|$.

Значит, $|a| + |b| = |a + b|$.

Последнее равенство возможно, только если оба числа a и b неотрицательны или оба неположительны, то есть если $ab \ge 0$:

$(x^3 + 2x^2 - 8x)(x^2 - 3x - 10) \ge 0$; $(x+4)(x+2)x(x-2)(x-5) \ge 0$.

Ответ: $[-4; -2]$, $[0; 2]$, $[5; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

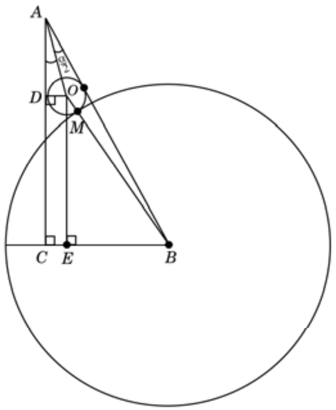
$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}, \cos\alpha = \frac{12}{13}, \sin\alpha = \frac{5}{13}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 + \frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = ODctg\frac{\alpha}{2} = 5x.$$



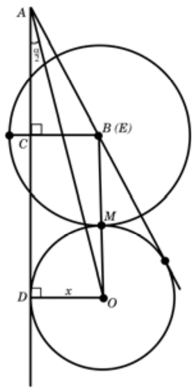


Рис. 1 Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 8 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x$, $BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x$,

причем $AD < AC$, т. е. $5x < 12$, $x < \frac{12}{5}$. По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$(8 + x)^2 = (12 - 5x)^2 + (5 - x)^2$, $25x^2 - 146x + 105 = 0$, $x < \frac{12}{5}$,

откуда находим, что $x = \frac{21}{25}$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому $OE = CD = AD - AC = 5x - 12$, причем $AD > AC$, т. е. $x > \frac{12}{5}$.

Тогда $(8 + x)^2 = (5x - 12)^2 + (5 - x)^2$; $25x^2 - 146x + 105 = 0$; $x > \frac{12}{5}$,

откуда находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

***Ответ*:** $\frac{21}{25}$ или 5.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x - 3a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x + 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных решений.

***Решение*.**

Преобразуем уравнение: $\sin(x - 3a) = -\left(x^2 - 4x + a\right) - \sin\left(\frac{x^2 - 6x + a}{2} + 3a\right)$;

$2x + \sin(x - 3a) = -(x^2 - 6x + a) - \sin\left(\frac{x^2 - 6x + a}{2} + 3a\right)$.

Обозначим $y = -\frac{x^2 - 6x + a}{2}$.

Уравнение принимает вид $2x + \sin(x - 3a) = 2y - \sin(-y + 3a)$.

Синус – функция нечетная, поэтому $2x + \sin(x - 3a) = 2y + \sin(y - 3a)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + \sin(t - 3a)$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Эта функция определена при всех t и ее производная равна $f'(t) = 2 + \cos(t - 3a) > 0$ при всех t.

Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $x = -\frac{x^2 - 6x + a}{2}$; $x^2 - 6x + a = -2x$; $x^2 - 4x + a = 0$.

Уравнение не имеет действительных решений, если дискриминант его отрицателен:
$4^2 - 4a < 0$; $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые привели к неверному ответу при верных рассуждениях.	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или обоснованно получено, что $x = y$.	2
Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но сделан переход к равенству $x = y$, хотя без обоснования.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем: $3nx = 2(n+3)(x+2)$,

откуда $3nx = 2(n+3)(x+2)$, $n = \dfrac{6x+12}{x-4} = 6 + \dfrac{36}{x-4} = 6\left(1 + \dfrac{6}{x-4}\right)$.

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\dfrac{6}{x-4} > -1$, откуда $x > 4$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ – натуральный делитель числа 36.

Количество шариков при этом $f(x) = 3nx = 18\left(x + \dfrac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x + \dfrac{24}{x-4}\right) + 108$.

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 840.

Комментарий. Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция $y = x + \dfrac{24}{x-4}$ монотонно убывает при $4 < x \le 4 + 2\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \ge 4 + 2\sqrt{6}$.

Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x-4$ – наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если $x-4=1$, то $x=5$, $f(5) = 18(5+24)+108 = 630$.

Если $x-4=36$, то $x=40$, $f(40) = 18\left(40 + \dfrac{2}{3}\right) + 108 = 840$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = y, \\ \cos x^2 = -\sin y. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения следует: $y \ge 0$, а второе уравнение принимает вид $\cos y = -\sin y$, откуда $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Учитывая, что $y \ge 0$, получаем: $k = 1, 2, \ldots$

Тогда $x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k}$.

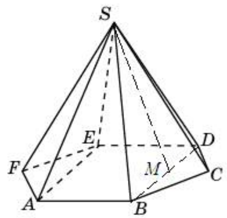
Ответ: $\left(-\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k}\,;\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\right), \left(\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + \pi k}\,; -\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k = 1, 2, \ldots$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получены лишние решения, поскольку не учтено, что $y \ge 0$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и AE.

Решение.

Искомый угол равен углу между прямыми SB и BD, поскольку $BD \,||\, AE$. В равнобедренном треугольнике BSD проведем высоту и медиану SM.



$BM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника SMB получаем:

$\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\left|x^3 + 3x^2 + 10x - 9\right| \le x^3 + 5x^2 - 10x + 9.$$

Решение.

$|a| \le b$ тогда и только тогда, когда $-b \le a \le b$. В данном случае получим:

$$\begin{cases} -x^3 - 5x^2 + 10x - 9 \le x^3 + 3x^2 + 10x - 9, \\ x^3 + 3x^2 + 10x - 9 \le x^3 + 5x^2 - 10x + 9. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + 4x^2 \ge 0, \\ x^2 - 10x + 9 \ge 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $x \ge -4$.

Решение второго неравенства: $x \le 1$ или $x \ge 9$.

Решение системы: $-4 \le x \le 1$; $x \ge 9$.

Ответ: $[-4; 1]$, $[9; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 36$ и $BC = 27$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 18. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = ODctg\frac{\alpha}{2} = 3x.$$

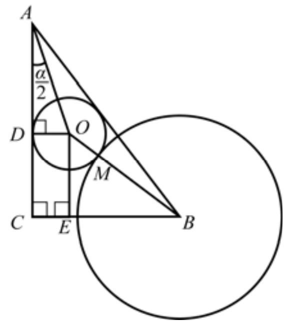


Рис. 1

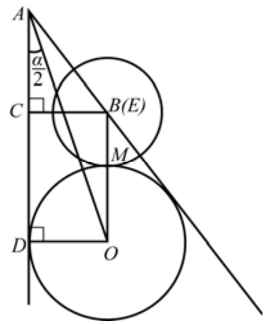


Рис. 2

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC (рис. 1), а центр второй – вне (рис. 2), причем искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 18 + x$.

В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$OE = CD = AC - AD = 36 - 3x, \quad BE = BC - CE = BC - OD = 27 - x,$

причем $AD < AC$, т. е. $3x < 36, \quad x < 12$. По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$(18+x)^2 = (36-3x)^2 + (27-x)^2, \quad x^2 - 34x + 189 = 0, \quad x < 12,$

откуда находим, что $x = 7$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому $OE = CD = AD - AC = 3x - 36$, причем $AD > AC$, т. е. $x > 12$. Тогда

$(18+x)^2 = (3x-36)^2 + (27-x)^2, \quad x^2 - 34x + 189 = 0, \quad x > 12,$

откуда находим, что $x = 27$ (это значит, что $OD = BC$, т. е. точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: 7 или 27.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем уравнение: $\cos\left(\frac{-2x^2 + 10x + 2a}{3} - a\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a;$

$3x - \cos(2x + a) = x^2 - 5x - a - \cos\left(\frac{-2(x^2 - 5x - a)}{3} - a\right).$

Обозначим $y = \frac{x^2 - 5x - a}{3}$.

Уравнение принимает вид $3x - \cos(2x + a) = 3y - \cos(-2y - a)$.

Косинус – функция четная, поэтому $3x - \cos(2x + a) = 3y - \cos(2y + a)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 3t - \cos(2t + a)$.

Уравнение принимает вид $f(x) = f(y)$.

Эта функция определена при всех t и ее производная равна $f'(t) = 3 + 2\sin(2t + a) > 0$ при всех t.

Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение $f(x) = f(y)$ равносильно условию $x = y$.

Сделаем обратную замену: $x = \frac{x^2 - 5x - a}{3}; \quad x^2 - 5x - a = 3x; \quad x^2 - 8x - a = 0.$

Уравнение имеет единственное решение, если дискриминант его равен нулю:

$8^2 + 4a = 0; \quad a = -16.$

Ответ: -16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Допущены ошибки, которые, возможно, привели к ответу в виде промежутка.	3
Ответ неверен, но в решении представлена правильная графическая интерпретация или обоснованно получено, что $x = y$.	2
Ответ возможно, отсутствует или неверен, но сделан переход к $x = y$, хотя без обоснования.	1
Все ситуации, отличные от описанных выше.	0

C6 Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит два пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x - 2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакетике $n - 5$. По условию задачи получаем: $2nx = 3(n-5)(x-2)$, откуда

$$n = \frac{15x - 30}{x - 6} = 15 + \frac{60}{x - 6} = 15\left(1 + \frac{4}{x - 6}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{4}{x-6} > -1$, откуда $x > 6$.

Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x - 6$ – натуральный делитель числа 60.

Количество шариков при этом

$$f(x) = 2nx = 2x\left(15 + \frac{60}{x - 6}\right) = 30\left(x + \frac{4x}{x - 6}\right) = 30\left(x + \frac{24}{x - 6}\right) + 120.$$

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 2112.

Комментарий. Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция $y = x + \frac{24}{x - 6}$ монотонно убывает при $6 < x \le 6 + 2\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \ge 6 + 2\sqrt{6}$.

Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x - 6$ – наибольший или наименьший натуральный делитель числа 60.

Если $x - 6 = 1$, то $x = 7$, $f(7) = 30(7 + 24) + 120 = 1050$.

Если $x - 6 = 60$, то $x = 66$, $f(66) = 30\left(66 + \frac{2}{5}\right) + 120 = 2112.$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Имеется вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но правильно организован перебор.	3
Ответ, возможно, неверен, однако правильно обозначен перебор с использованием геометрических или аналитических соображений.	2
Решения ищутся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0