С6 Диагностическая работа МИОО 19.11.09

Множество А состоит из натуральных чисел. Количество чисел в А больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из А равно 210. Для любых двух чисел из А их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из А делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит А.

Сначала рассмотрим наименьшее общее кратное $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Значит искомые числа будут иметь вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, причем $a, b, c, d = 0;1$

Таким образом, получаем числа:

$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2;$ $\quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 6;$ $\quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 30;$ $\quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 210;$

$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 3;$ $\quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 10;$ $\quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 42;$

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 5;$ $\quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 14;$ $\quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 70;$

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 7;$ $\quad 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15;$ $\quad 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 105;$

$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 21;$

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 35;$

Делитель произведения искомых чисел $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$ содержит семь двоек. Всего четных чисел получилось 8: $2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210$ - их произведение будет иметь вид $2^8 \cdot 4^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ является полным квадратом целого числа – противоречие с условием.

Значит одно число лишнее – все остальные надо оставить, иначе не наберем 7 двоек. И это число – 2, потому, что в противном случае нарушится условие задачи – для любых двух чисел из А наибольший общий делитель больше единицы – все остальные числа ($3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$) не будут иметь с двойкой общих делителей, отличных от единицы.

Из условия наличия наибольшего общего делителя больше единицы делаем вывод, что искомые нами числа должны содержать множители 3, 5 и 7, а такое число там только одно – 105.

Окончательно получаем 8 чисел $6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210$.

Ответ: $6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210$