С6 Диагностическая работа МИОО 19.11.09

Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, ..., a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, ..., b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Имеются прогрессии:

$$a_n = 5 + 3(n-1) = 2 + 3n$$

$$b_m = 9 + 5(m-1) = 4 + 5m$$

Найдем при каких номерах члены последовательностей равны

$$2 + 3n = 4 + 5m \quad \rightarrow \quad m = \frac{3n-2}{5}$$

Учитывая , что для делимости на 5 необходимо, чтобы число $3n-2$ заканчивалось на 0 или 5.
Получаем:

$$n = 4; \quad m = 2; \quad a_n = b_m = 14$$

$$n = 9; \quad m = 5; \quad a_n = b_m = 29$$

$$n = 14; \quad m = 8; \quad a_n = b_m = 44$$

$$n = 19; \quad m = 11; \quad a_n = b_m = 59$$

И т.д. Видим, что совпадающие члены образуют прогрессию вида $x_t = 14 + 15(t-1)$.

$$15t - 1 = 2 + 3n \quad \rightarrow \quad n = 5t - 1$$

$$15t - 1 = 4 + 5m \quad \rightarrow \quad m = 3t - 1$$

Это можно доказать и иначе. Из условия $3n = 5m + 2$ следует, что $n = m + \frac{2(m+1)}{3}$. Чтобы $n$ было целым необходимо, чтобы $m + 1 = 3t$. Тогда $m = 3t - 1$. Подставляя в условие для $n$, получаем $n = 5t - 1$. Если члены прогрессий равны, то $a_n = b_m = x_t = 2 + 3(5t-1) = 15t - 1$

Сумма $t$ первых членов прогрессии $x_t$ равна

$$\frac{14 + 14 + 15(t-1)}{2} t = 815$$

$$15t^2 + 13t - 1630 = 0$$

$$t_{1,2} = 10, -\frac{163}{15}$$

Итого $t = 10 \quad \rightarrow \quad M = 49; N = 29$

Ответ: $M = 49; N = 29$

http://alexlarin.narod.ru